Title	La philosophie des mathématiques d'Ibn al-Haytham : I. L'analyse et la synthèse / par Roshdi Rashed, C. N. R. S.
Contained in	MIDÉO : Mélanges de l'Institut dominicain d'études orientales du Caire / Direction : Georges Shehata Anawati, (puis) Régis Morelon, (puis) Emilio Platti, (puis) Emmanuel Pisani, (puis) Dennis Halft
Volume	20 (1991)
pages	31-231
URL	https://ideo.diamondrda.org/manifestation/75273

MIDEO 20 (1991)

LA PHILOSOPHIE DES MATHÉMATIQUES D'IBN AL-HAYTHAM

par

Roshdi RASHED, C.N.R.S.

I

L'ANALYSE ET LA SYNTHÈSE

S'interroger sur l'existence d'une philosophie des mathématiques en arabe, c'est s'engager dans un double programme de recherche, en entreprenant une double enquête auprès des philosophes et auprès des mathématiciens eux-mêmes. C'est donc non seulement vers Avicenne, al-Rāzī, Maïmonide... que nous avons dû nous tourner, mais aussi vers Thābit ibn Qurra[1], son petit-fils Ibrāhīm ibn Sinān[2], al-Sijzī[3] et Ibn al-Haytham. Peu nombreuses et encore modestes, ces études avaient pour unique intention de justifier la précédente interrogation, et par là de montrer que cette philosophie des mathématiques existe bien et constitue un chapitre important et florissant de la philosophie islamique. Mais si cette philosophie des mathématiques n'a pas reçu des historiens l'attention qu'elle mérite, cela tient sans aucun doute, pour une part au moins, à la nature qui est la sienne: le plus souvent en effet, elle avançait cachée dans les travaux mathématiques, et éclatée selon divers thèmes. Or, pour l'historien qui favorise l'architectonique des grands systèmes métaphysiques, cette recherche enfouie, divisée, développée pour une bonne part aux confins de la pratique même du mathématicien, risquait de passer inaperçue.

De plus, cette activité philosophique s'est parfois présentée comme le moyen d'apporter une solution philosophique à des problèmes mathématiques hors d'atteinte des mathématiques du temps. Nous avons ainsi pu montrer, sur l'exemple de l'asymptote à une hyperbole, comment la philosophie d'al-Sizjī s'est substituée aux concepts d'une analyse mathématique qui ne verra le jour que beaucoup plus tard.

Avec les études que nous proposons ici, nous entendons passer à un autre stade de la recherche : il ne s'agit plus d'établir l'existence de cette philosophie, mais de constituer son corps. Nous avons choisi de commencer par une œuvre capitale, celle du mathématicien et physicien Ibn al-Haytham [965-1040], dans laquelle la philosophie occupe une place toute particulière. Ibn al-Haytham a en effet composé deux traités substantiels : le premier porte sur *L'analyse et la synthèse*, le second sur *Les connus*. De l'aveu même de leur auteur, ces deux traités sont intimement liés. Dans le premier, Ibn al-Haytham a recours à des concepts qu'il ne définira que dans le second, lequel est déjà annoncé dans le premier. Il est donc impossible, à moins de méconnaître complètement le projet d'Ibn al-Haytham, d'évoquer l'un de ces traités sans avoir l'autre présent à l'esprit. Seule cette prudence méthodologique nous permettra de comprendre qu'Ibn al-Haytham appartenait à une tradition bien ancienne qui s'intéressait à l'analyse et à la synthèse, et comment il a pu aller bien plus loin que ses prédécesseurs. Rappelons, pour mémoire, que le thème de l'analyse et de la synthèse a dominé pendant deux millénaires au moins la philosophie des mathématiques ; que l'on pense, par exemple, à certaines indications de Platon et d'Aristote, et surtout aux textes de Galien, Pappus et Proclus, parmi bien d'autres[4] ; que l'on pense aussi à ce que fut son essor chez les philosophes et les mathématiciens arabes, qui lui consacreront non seulement des paragraphes dans des rédactions philosophiques et mathématiques, mais des traités entiers — al-Kindī par exemple — qui deviennent de plus en plus volumineux. Aucun mémoire de l'antiquité n'est comparable à cet égard à celui d'Ibrāhīm ibn Sinān, lequel sera largement dépassé par Ibn al-Haytham.

Mais, avant d'envisager de comprendre ces faits nouveaux, en engageant les commentaires mathématiques, historiques et philosophiques indispensables, la bonne méthode demande que l'on offre au lecteur les textes d'Ibn al-Haytham, ainsi que leur traduction. On sera ainsi en mesure de suivre nos commentaires et nos interprétations, et on pourra juger sur pièce. Dans un premier article, le lecteur trouvera l'édition *princeps* de *L'analyse et la synthèse*, que nous avons promise depuis bien longtemps[5]. Un second article sera consacré au traité sur *Les Connus*; là encore, nous donnerons l'édition *princeps* de ce texte, ainsi que sa traduction française. Dans un troisième et dernier article, nous proposons un commentaire des deux textes à la fois, et nous dégageons la philosophie des mathématiques d'Ibn al-Haytham.

Sans nous étendre ici sur l'histoire du texte de *L'analyse et la synthèse*, histoire que nous réservons au troisième article, indiquons très brièvement les éléments sans lesquels nous ne pouvons expliquer comment nous l'avons établi.

Ce traité nous est parvenu en quatre manuscrits:

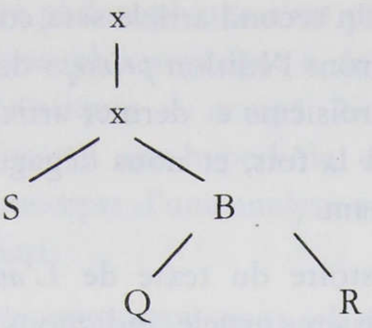
1° le 3652/12 de la Bibliothèque Chester Beatty, à Dublin, 69ᵛ - 86ʳ, selon la numérotation en chiffres arabes. Ce manuscrit, noté ici B, est une copie faite à Bagdad, et achevée le samedi matin 23 Jumādā al -'ūlā 612 de l'Hégire, c'est-à-dire le samedi matin 19 septembre 1215, comme l'indique le colophon. L'écriture est *naskhī* , soignée, et les figures sont tracées par le copiste.

2° Le 323 de la collection Taymūr, Riyāḍa, à Dār al-Kutub au Caire. Ce manuscrit est numéroté en 68 pages, et il est noté ici Q. Il appartenait à la collection d'un copiste célèbre, Muṣṭafā Ṣidqī. L'écriture est une belle *nasta'līq* et les figures n'ont pas été tracées.

3° Le 1191/1 de la collection Reshit, 1ᵛ-30ᵛ, Istanbul. Ce manuscrit, noté ici R, appartenait aussi à la collection de Muṣṭafā Ṣidqī, et a donc été copié avant le milieu du XVIIIème siècle. L'écriture est *nasta'līq* et les figures sont tracées. Quant à la date de sa copie, nous ne sommes pas très au clair, mais elle nous semble antérieure à celle de Q.

4° Le quatrième manuscrit se trouve dans une collection de la bibliothèque V.I. Lenin à Kouïbychev, 316ʳ-336ʳ. Ce manuscrit, noté ici S, est lui aussi copié en *nasta'līq*, mais nous ignorons la date de la copie, qui pourrait être entre le XIIème et le XIVème siècle.

Pour écrire l'histoire du texte, nous avons suivi la méthode maintes fois exposée: la comparaison systématique de ces manuscrits pris deux à deux à l'aide des omissions, des ajouts, des différents types de fautes, etc. Les résultats chiffrés et les tableaux établis grâce à ces comparaisons peuvent se résumer dans le *stemma* suivant:



Ainsi le manuscrit du Caire et celui d'Istanbul sont de simples copies de B, et de B uniquement; nous les avons par conséquent négligés au cours de l'établissement du texte. Celui-ci a donc été établi à partir de B et de S. Notons que B présente, par rapport à S, 53 omissions d'un mot, 46 omissions d'une phrase (de plus de deux mots, parfois de 32 mots), de sorte qu'à partir de B seul nous ne pouvions disposer d'un texte sûr. En revanche, dans S on peut recenser 54 omissions d'un mot, par rapport à B, mais seulement 17 omissions d'une phrase. Relevons enfin dans B un incident important — que l'on retrouve dans Q et dans R — mais qui n'apparaît pas dans S, la répétition d'un long paragraphe (cf.82^r). D'autre part, le nombre des omissions communes à B et à S, ainsi que les fautes communes, montre bien que ces deux familles descendent d'un ancêtre commun, nécessairement antérieur au XIIIème siècle, puisque B a été achevé en 1215.

Pour établir ces textes, nous nous sommes conformé aux règles les plus rigoureuses sur lesquelles nous nous sommes expliqué plus d'une fois[6]. Quant à la traduction française, elle s'inspire également de la méthode que nous nous sommes fixée auparavant: traduire littéralement, sans pourtant heurter les règles stylistiques du français, dans une langue qui donc respecte le sens et, autant qu'il est possible, la lettre du texte arabe. Notons que l'introduction, c'est-à-dire la partie la plus philosophique du traité, a déjà été publiée en appendice à notre étude sur le texte d'Ibn al-Haytham[7]. De même la traduction de son théorème sur les nombres parfaits, ainsi qu'une discussion de l'histoire de ce théorème ont fait l'objet d'une précédente étude[8]. Le lecteur désireux d'avoir une idée globale de cette philosophie mathématique d'Ibn al-Haytham peut, en attendant notre commentaire extensif dans le troisième article, se reporter à l'analyse que nous avons déjà publiée.

Je tiens enfin à remercier Monsieur le directeur de Dār al-Kutub et Monsieur le Directeur de la bibliothèque Suleymania pour m'avoir fourni les photocopies du texte d'Ibn al-Haytham. Ma reconnaissance va également au

Pr. B. Rosenfeld et au Dr D. James, qui m'ont respectivement communiqué une photographie de S et un microfilm de B.

1 Voir: R. Rashed, «Le concept d'infini à l'époque de Rhazès», *Actes du Colloque Rhazès*, Le Caire (1977).

2 Voir: id., «Ibrāhīm ibn Sīnān», article du *Dictionary of Scientific Biography*, vol. 7, New York, Scribner (1973): 2-3.

3 Voir: id., «Al-Sizjī et Maïmonide: Commentaire mathématique et philosophique de la proposition II-14 des *Coniques* d'Apollonius», *Archives Internationales d'Histoire des Sciences*, n°119, vol. 37 (1987): 263-296. Traduction anglaise: *Fundamenta Scientiae*, vol. 8, n° 3/4 (1987): 251-256.

4 A cela, il faut ajouter les textes des algébristes comme Al-Samaw'al.

5 Notre travail était en effet annoncé en ces termes en novembre 1969 dans un message adressé par Monsieur P. Jacquinot, Directeur Général du Centre National de la Recherche Scientifique, au Congrès en commémoration du millénaire d'Ibn al-Haytham, qui se tenait à Karachi: «...la préparation d'une édition critique d'un texte inédit de cet auteur, texte peu connu, malgré son importance dans l'histoire des mathématiques arabes, sur *l'analyse et la synthèse*»; cf. *Ibn al-Haytham, Proceedings of the celebration of 1000th Anniversary*, edited by Hakim Mohammed Said, printed in Pakistan by the Times Press, Sadar, Karachi, 177. Le thème, ainsi que les travaux d'Ibn al-Haytham, ont fait l'objet d'un cours prononcé à la Faculté des Arts et Sciences de Montréal, en 1972, et de plusieurs séminaires à l'Institut d'Histoire des Sciences de l'Université Paris I, entre 1972 et 1976. Si l'édition n'a pas vu le jour plus tôt, c'est que nous avons dû attendre de disposer d'un manuscrit qui se trouve à Kouïbychev, et qu'il nous fallait achever en même temps l'établissement et la traduction du texte sur *Les Connus*.

6 Voir par exemple *Diophante Les Arithmétiques*, Livre IV, vol 3 . « Collection des Universités de France». Paris: Les Belles Lettres (1984). Introduction, LXXIV sqq.

7 «L'analyse et la synthèse selon Ibn al-Haytham», *Mathématiques et philosophie de l'Antiquité à l'âge classique. Études en hommage à Jules Vuillemin*, éditées par R.Rashed. Paris, éditions du C.N.R.S. (1991): 131-162.

8 «Ibn al-Haytham et les nombres parfaits », *Historia Mathematica* 16 (1989): 343-352.

Au nom de Dieu Clément et Miséricordieux

B-69v

S-316r

TRAITÉ D'AL-ḤASAN IBN AL-ḤASAN IBN AL-HAYTHAM SUR L'ANALYSE ET LA SYNTHÈSE

Toute science et toute étude ont une fin, et cette fin est le sommet vers lequel on s'élève, et auquel aspire l'esprit de ceux qui la recherchent avec zèle, dans le but de l'atteindre et de la maîtriser. Les sciences mathématiques sont fondées sur les démonstrations; elles ont pour fins auxquelles on s'élève la détermination, dans leurs parties, des inconnues, et l'établissement de démonstrations qui indiquent la vérité de leurs concepts. Le sommet auquel aspire l'esprit de ceux qui recherchent ces sciences avec zèle, est d'obtenir des démonstrations par lesquelles on déduit les inconnues dans ces sciences. La démonstration est le syllogisme qui indique nécessairement la vérité de sa propre conclusion. Ce syllogisme est composé de prémisses dont l'entendement reconnaît la vérité et la validité, sans être troublé d'aucun doute à leur propos; et d'un ordre et d'un arrangement tels de ces prémisses, qu'ils contraignent l'auditeur à être convaincu de leurs conséquences et à croire en la validité de ce qui résulte de leur arrangement.

La méthode pour obtenir ces syllogismes est de poursuivre la recherche de leurs prémisses, de s'ingénier à les trouver, et de chercher leur arrangement. L'art par lequel on poursuit la recherche de ces prémisses et on parvient à cet

بسم الله الرحمن الرحيم

ب - ٦٩ - ظ
س - ٣١٦ - و

مقالة للحسن بن الحسن بن الهيثم
في التحليل والتركيب

كل علم وكل تَعَلُّم فله غاية هي ذروته التي يُرتقى إليها وهي التي تسمو نفوس الراغبين فيه والمجتهدين في طلبه إلى الوصول إليها والاقتدار عليها. وعلوم التعاليم مبنية على البراهين، وغاياتها التي يُرتقى إليها هي استخراج المجهولات من جزئياتها ووجود البراهين التي تدل على حقائق معانيها. والذروة التي تسمو إليها نفوس الراغبين في هذه العلوم والمجتهدين في طلبها الظفرُ بالبراهين التي تُستَنْبط بها مجهولاتها. والبرهان هو القياس الدال بالضرورة على صحة نتيجته. وهذا القياس هومركب من مقدمات يعترف الفهم بصدقها وصحتها ولا يعترضه شيء من الشبهات فيها، ومن نظام وترتيب لهذه المقدمات يضطر سامعه إلى تيقن لوازمها واعتقاد صحة ما ينتجه ترتيبها.

وطريق الظفر بهذه المقاييس هو تصيد مقدماتها وتمحل الحيل في تطلبها وتطلب ترتيبها. والصناعة التي بها تصيد هذه المقدمات وبها يتوصل إلى الترتيب المؤدي إلى

1 بعد البسملة نجد «رب وفق» في [ب] – 2 للحسن : أثبتها في الهامش [ب] / الحسن : الحسين [س] – 4 كل : مكررة [س] / تسمو : تسموا [ب، س] / نفوس : ناقصة [ب] – 7 حقائق : حقائقها [ب] / تسمو : تسموا [ب، س] – 8 طلبها : طلبها هو [س] / هو القياس : ناقصة [ب] – 9 وهذا القياس : مكررة [س] – 11 ترتيبها : ترتها [س] – 13 ترتيبها : ترتبها [س]

arrangement menant à ceux de leurs résultats que l'on recherche, s'appelle l'art de l'analyse. Tout ce qui a vu le jour en sciences mathématiques n'est dû qu'à cet art.

Nous expliquons dans ce traité comment procéder à l'art de l'analyse, qui conduit à déterminer les inconnues des sciences mathématiques, et comment procéder pour poursuivre la recherche des prémisses, qui sont le matériau des démonstrations indiquant la validité de ce qu'on détermine des inconnues de ces sciences, et la méthode pour parvenir à l'arrangement de ces prémisses et à la figure de leur combinaison. Nous montrons également comment sont ces prémisses et l'inverse de leur arrangement, qui est le syllogisme démonstratif, et c'est ce qu'on appelle la synthèse; on l'a en effet appelée synthèse car c'est la composition des prémisses déduites par l'analyse, et c'est la synthèse syllogistique. En outre, nous partageons cet art en ses subdivisions, nous en évoquons les règles et les lois, et nous exposons le détail de ses parties. Nous apportons également notre aide pour tous ces principes utilisés en cet art et requis par lui, et ainsi nous commençons par y dire:

Nous disons que la façon de procéder dans l'analyse est de supposer le recherché tout à fait achevé et complet, puis nous examinons les propriétés de son objet nécessaires à cet objet et à son genre, puis les conséquences nécessaires de celles-ci, puis les conséquences nécessaires de ces dernières, jusqu'à ce que l'on aboutisse à une chose donnée dans ce recherché, qui ne soit pas impossible en lui. Voici comment on procède en général dans l'analyse. Quand cet examen aboutit à la notion donnée, on interrompt l'examen de ce recherché, et celui qui examine s'arrête là; le donné est la notion que l'on ne peut rejeter, et que rien ne peut empêcher.

La façon de procéder dans la synthèse consiste à supposer la chose donnée, à laquelle a abouti l'analyse et à laquelle s'est arrêté celui qui examine, puis à lui ajouter la propriété trouvée, puis à lui ajouter la propriété trouvée avant cette dernière; on suit dans cet arrangement l'inverse de l'arrangement suivi dans l'analyse; si, en effet l'on suit cette voie, l'arrangement aboutit à la notion recherchée, car elle était le premier objet dans l'analyse; si on inverse l'arrangement, le premier devient alors le dernier; et si l'arrangement inversé aboutit au premier recherché supposé, alors cet arrangement sera un syllogisme démonstratif, et le premier recherché supposé sera sa conclusion; le

المطلوب من نتائجها تسمى صناعة التحليل. وجميع ما خرج إلى الوجود من علوم التعاليم إنما خرج بهذه الصناعة.

ونحن نشرح في هذه المقالة كيفية صناعة التحليل المؤدية إلى استخراج المجهولات من العلوم التعليمية وكيفة تصيد المقدمات التي هي مواد البراهين الدالة على صحة ما يستخرج من مجهولاتها، وطريق التوصل إلى ترتيب هذه المقدمات وهيئة تأليفها، ونبيّن أيضًا كيفية هذه المقدمات وعكس ترتيبها الذي هو القياس البرهاني، وهو الذي يسمى التركيب؛ وإنما سمي تركيباً لأنه تركيب المقدمات المستنبطة بالتحليل 〈وهو〉 التركيب القياسي. ونقسم مع ذلك هذه الصناعة إلى أقسامها ونذكر قواعدها وقوانينها وتفصيلها إلى جزئياتها ونعين على جميع ما يفتقر إليه هذه الصناعة من الأصول المستعملة فيها، وهذا حين ابتدائنا بالقول فيها:

فنقول: إن كيفية التحليل هو أن نفرض المطلوب على غاية التمام والكمال، ثم ننظر في خواص موضوعه اللازمة لذلك الموضوع ولجنسه ثم فيما يلزم من لوازمه ثم فيما يلزم تلك اللوازم إلى أن يُنتهى إلى شيء معطى في ذلك المطلوب وغير ممتنع فيه. فهذا هو كيفية التحليل بالجملة. فإذا انتهى هذا النظر إلى المعنى المعطى، قطع النظر في ذلك المطلوب ووقف الناظر عنده. والمعطى هو المعنى الذي لا يمكن دفعه ولا يمنع منه مانع.

فأما كيفية التركيب فهو أن نفرض الشيء المعطى، الذي إليه انتهى التحليل وعنده وقف الناظر، ثم يضاف إليه الخاصة التي وجدت 〈ثم يضاف إليه الخاصة التي وجدت〉 قبل تلك الخاصة، ويُسلك في الترتيب عكس الترتيب الذي سُلك في التحليل، فإنه إذا اعتمدت هذه الطريقة انتهى الترتيب إلى المعنى المطلوب، لأنه كان أول موضوع في التحليل. فعند عكس الترتيب يصير الأول آخراً؛ وإذا انتهى الترتيب المعكوس إلى المطلوب الأول المفروض، صار هذا الترتيب قياساً برهانياً، وصار المطلوب

1 تسمى: يسمى [ب] – 3 المؤدية: المؤدي [ب] – 6 كيفية: عكس [س] / ترتيبها: ترتبها [س] – 7 المستنبطة: المستنبط [س] – 9 الأصول: الامور [ب] – 12 ثم فيما: وفيما [ب] – 13 معطى: كتبها ناسخ [ب] «معطا»، ولن نشير إليها فيما بعد – 14 فإذا: واذا [ب] – 20 آخرًا: اخر [ب] / وإذا: فإذا [س].

recherché existera alors, et de plus sa validité sera certaine, car elle est conclusion d'un syllogisme démonstratif indiquant nécessairement la validité de sa conclusion.

L'art de l'analyse exige une connaissance préalable des principes des mathématiques et de leur exercice, de sorte que l'analyste a ces principes à l'esprit lors de la pratique de l'analyse, et a en outre recours à une intuition dans cet art; tout art ne s'achève en effet pour celui qui le pratique que par une intuition de la méthode qui mène à ce que l'on recherche. On a recours à l'intuition dans l'art de l'analyse lorsque l'analyste ne trouve pas dans l'objet du problème des propriétés données qui, une fois composées, conduisent au recherché; dans ce cas, l'analyste a besoin de l'intuition. Ce qu'il a besoin de saisir par l'intuition est un ajout, qu'il ajoute à l'objet, afin qu'il se produise, une fois ceci ajouté, des propriétés de l'objet qui conduisent, avec cet ajout, aux propriétés qui, une fois composées, ont pour résultat le recherché.

Dans la suite de cet exposé, nous donnerons des exemples de tout ce que nous venons de mentionner, qui font apparaître toutes les notions que nous avons déterminées: le mode de ces notions s'exhibera, celles d'entre elles qui étaient obscures se dévoileront, en outre la validité de ce que nous avons déterminé et arrangé se vérifiera et deviendra certaine, une fois que nous aurons exposé cet art en détail, que nous l'aurons arrangé, et que nous aurons embrassé toutes ses espèces et toutes ses parties.

Cet art se partage selon la division de ses objets, car la méthode pour
S-316v analyser chacune des espèces de ses objets est autre que la méthode / dans l'analyse des espèces restantes. Les objets de cet art sont les inconnues dans les parties des sciences mathématiques; ces inconnues dans les parties des sciences mathématiques se divisent elles-mêmes suivant les subdivisions de toutes les parties de ces sciences. Or, les parties de ces sciences se divisent d'abord en deux subdivisions: le théorique et le pratique; toute partie des sciences mathématiques est en effet ou bien théorique ou bien pratique. Celle d'entre

الأول المفروض نتيجة له؛ ويصير المطلوب موجوداً ومع ذلك صحته متيقنة لأنها نتيجة قياس برهاني دال بالضرورة على صحة نتيجته.

وصناعة التحليل تحتاج إلى تقديم العلم بأصول التعاليم والارتياض بها ليكون المحلل ذاكراً للأصول عند عمل التحليل، ويحتاج مع ذلك أيضاً إلى حدس صناعي؛ وكل صناعة فليس تتم لصانعها إلا بحدس على الطريق الذي يؤدي إلى المطلوب. والحدس إنما يُحتاج إليه في صناعة التحليل إذا لم يجد المحلل في موضوع المسألة خواصَّ معطاة متى رُكّبت أنتجت المطلوب، فعند هذه الحال يحتاج المحلل إلى الحدس؛ والذي يحتاج إلى الحدس عليه هو زيادة يزيدها في الموضوع لتحدث بزيادتها خواص للموضوع مع الزيادة تؤدي إلى الخواص المعطاة التي متى ركبت أنتجت المطلوب.

ونحن في مُستأنف القول نورد أمثلة لجميع ما ذكرناه يتضح بها جميع المعاني التي حددناها، وتظهر كيفياتها، وينكشف ما غمض منها، ويتحقق مع ذلك صحة ما حددناه ورتبناه؛ وتتيقن من بعد أن نفصّل هذه الصناعة ونرتبها ونستوعب سائر أنواعها وأقسامها.

وهذه الصناعة تنقسم بحسب انقسام موضوعاتها، لأن الطريق في تحليل كل نوع من أنواع موضوعاتها غير الطريق / في تحليل باقي أنواعها. وموضوعات هذه الصناعة س – ٣١٦ – ظ هي المجهولات من جزئيات العلوم التعليمية؛ والمجهولات من جزئيات العلوم التعليمية تنقسم إلى أقسام جميع جزئيات هذه العلوم. وجزئيات هذه العلوم تنقسم أولاً إلى قسمين هما: العلمي والعملي؛ وذلك أن كل جزء من أجزاء العلوم التعليمية هو إما علمي وإما عملي. فالعلمي منها هو المطلوب علم حقيقة خاصة هي لذلك الجزء لازمة له

4 التحليل: كرر بعدها «والتحليل» [س] – 5 فليس تتم: هذا الأسلوب صحيح ولكنه غير شائع في الكلام القديم، فالفعل يقع هنا بعد «ليس» مباشرة بغير فاصل، ونعربها هنا على أنها حرف نفي مهمل لا يعمل، وسنأخذ بهذا دون الإشارة إليه مرة أخرى. فليس ثم [س] / إلى المطلوب: للمطلوب [س] – 6 خواصّ: خواصا [ب] – 7 الحدس: الحد [س] – 8 لتحدث: فتحدث [س] / للموضوع: الموضوع [س] – 10 يتضح: ينتج [ب] – 11 وتظهر: ويظهر [ب] / وينكشف: وتنكشف [ب] – 12 وتتيقن: ونتيقن [ب، س] / نفصّل: يفصل [س] / ونرتبها: ورتبها [س] – 15 الصناعة: ناقصة [س] – 17 تنقسم (الأولى): ينقسم [س] – 19 حقيقة: حقيقته [ب].

elles qui est théorique est celle où l'on recherche la connaissance de la vérité d'une propriété nécessaire à cette partie en raison de son essence et de sa forme. Celle qui est pratique est celle qu'on cherche à effectuer et à réaliser dans l'être par l'action. Nous donnons pour le théorique et pour le pratique
B-70r des exemples des parties de chaque espèce des sciences / mathématiques, afin qu'apparaisse la validité de ce que nous avons mentionné.

Les notions propres à la partie théorique de la science des nombres sont à l'exemple de notre énoncé: pour deux nombres carrés, le rapport de l'un à l'autre est égal au rapport du côté au côté multiplié par lui-même; et à l'exemple de notre énoncé: étant donnés des nombres successivement proportionnels, et qui sont les plus petits nombres suivant leur rapport, chacun des nombres⟩ des deux extrémités est premier avec l'autre[1]; et à l'exemple de notre énoncé: pour deux nombres dont l'un mesure l'autre, celui qui est mesuré a une partie homonyme de celui qui le mesure. C'est selon cette manière que sont toutes les notions théoriques dans la science des nombres.

Les notions propres à la partie pratique de la science des nombres sont à l'exemple de notre énoncé: trouver deux nombres carrés tels que leur somme soit un carré; et à l'exemple de notre énoncé: trouver des nombres successifs suivant le même rapport, à volonté; et à l'exemple de notre énoncé: trouver un nombre parfait[2]. C'est selon cette manière que sont toutes les notions pratiques de la science des nombres.

Les notions théoriques de la géométrie sont à l'exemple de notre énoncé: la somme de⟩ deux côtés d'un triangle est plus grande que le côté restant; et à l'exemple de notre énoncé: la somme des angles d'un triangle est égale à deux angles droits; et à l'exemple de notre énoncé: les côtés et les angles opposés dans les surfaces à côtés parallèles sont égaux deux à deux.

Les notions pratiques de la géométrie sont à l'exemple de notre énoncé: construire un triangle équilatéral sur une droite donnée; et à l'exemple de notre énoncé: construire sur une droite donnée un angle égal à un angle donné; et à l'exemple de notre énoncé: construire un carré égal à une figure donnée.

Les notions théoriques de l'astronomie sont à l'exemple de notre énoncé: le centre de la sphère du soleil est à l'extérieur du centre de l'Univers; et à

1. Comparer à Euclide, IX, 15.

2. Littéralement: «le nombre parfait».

من أجل ذاته وصورته. والعملي هو المطلوب عمله وإخراجه إلى الوجود بالعمل. ونمثل في العلمي والعملي بأمثلة من جزئيات كل نوع من أنواع العلوم / التعليمية ليظهر صحة ما ذكرناه. ب – ٧٠ – و

فالمعاني الجزئية العلمية من علم العدد هي مثل قولنا : كل عددين مربعين فإن نسبة أحدهما إلى الآخر هي نسبة ضلعه إلى ضلعه مُثناة. ومثل قولنا : إذا كانت أعداد متوالية متناسبة وكانت أقل الأعداد على نسبتها، فإن كل واحد من الطرفين أول عند الآخر. ومثل قولنا : كل عددين يعدّ أحدهما الآخر فإن في المعدود جزءاً سمياً للعدد العاد. فعلى هذه الصفة يكون جميع المعاني العلمية من علم العدد.

فأما المعاني الجزئية العملية من علم العدد، فمثل قولنا : نريد أن نجد عددين مربعين يكون مجموعهما مربعا. ومثل قولنا : نريد أن نجد أعداداً متوالية على نسبة واحدة كم شئنا. ومثل قولنا : نريد أن نجد العدد التام. فعلى هذه الصفة يكون جميع المعاني العملية من علم العدد.

فأما المعاني العلمية من علم الهندسة فهي مثل قولنا : كل ضلعين من مثلث فهما أعظم من الضلع الباقي. ومثل قولنا : كل مثلث فزواياه الثلاث مجموعة مساويات لزاويتين قائمتين. ومثل قولنا : الأضلاع والزوايا المتقابلة من السطوح المتوازية الأضلاع مُساوٍ بعضها لبعض.

وأما المعاني العملية من علم الهندسة، فمثل قولنا : نريد أن نعمل مثلثاً متساوي الأضلاع على خط مستقيم مفروض. ومثل قولنا : نريد أن نعمل على خط مفروض زاوية مساوية لزاوية مفروضة. ومثل قولنا : نريد أن نعمل مربعاً مساوياً لشكل مفروض.

وأما المعاني العلمية من علم الهيئة، فمثل قولنا : إن مركز فلك الشمس خارج عن

6 أول : اولا [ب، س] – 7 الآخر : للاخر [ب] / جزءًا سميًا : جزء سمى [ب، س] – 9 العملية : العلمية [ب] – 10 أعدادًا : أعداد [ب] – 12 العملية : العلمية [ب] – 14 أعظم : أعلم [س] – 15 والزوايا : الزوايا [ب] – 18 الأضلاع : ناقصة [س] / مفروض (الأولى) : معلوم [ب].

l'exemple de notre énoncé: le mouvement des Gémeaux est à l'opposé de la succession des signes du Zodiaque[3]; et à l'exemple de notre énoncé: la sphère des étoiles fixes est plus haute que les sphères des astres errants.

Les notions pratiques de l'astronomie ne se trouvent pas dans l'astronomie elle-même, mais dans ses démonstrations, comme par exemple: retrancher un rapport d'un rapport, ou ajouter un rapport à un rapport, ou mener d'un point une perpendiculaire à l'une des lignes imaginées en astronomie, ou construire un triangle sur des lignes de l'astronomie. Toutes ces notions se ramènent à la science des nombres ou à la géométrie. Nous pouvons y mentionner la construction des instruments par lesquels on observe les astres, et ceci n'entre pas dans la somme des sciences mathématiques théorique.

Les notions théoriques de la musique sont à l'exemple de notre énoncé: l'intervalle d'octave est composé de l'intervalle de quarte et de l'intervalle de quinte; et à l'exemple de notre énoncé: l'intervalle d'octave est deux fois composé de quinze degrés d'intervalle; et à l'exemple de notre énoncé: l'intervalle de quarte se partage en plus de deux tons.

Les notions pratiques de la musique sont la composition des degrés; elles se ramènent à la science des nombres, car elles se ramènent à la composition des rapports numériques.

Quant à la pratique de la musique, c'est-à-dire la pratique par la main qui consiste à frapper les cordes et les instruments, et à composer le son, elle n'intervient pas dans l'ensemble de cet examen.

Aucune notion, dans l'une ou l'autre des sciences mathématiques, ne peut être que théorique ou pratique. La partie pratique se partage ensuite en deux subdivisions, avec discussion ou sans discussion. La partie avec discussion est à l'exemple de notre énoncé dans les parties de la science des nombres: diviser deux nombres connus selon deux rapports connus; si on n'impose pas la condition que l'un des deux rapports soit plus grand que le rapport de l'un des nombres divisés à l'autre, et que l'autre rapport soit plus petit que le rapport des deux nombres divisés l'un par l'autre, il ne sera pas possible que

3. La constellation des Gémeaux participe au mouvement diurne, qui a lieu dans le sens rétrograde autour de l'axe du monde. La progression annuelle apparente du soleil à travers les signes du Zodiaque se fait dans le sens direct.

مركز العالم. ومثل قولنا : إن حركة الجوزاء هي إلى خلاف توالي البروج. ومثل قولنا : إن فلك الكواكب الثابتة أعلى من أفلاك الكواكب المتحيرة.

فأما المعاني العملية من علم الهيئة، فليس تكون في الهيئة نفسها ولكنها تكون في براهينها، وهو مثل أن ننقص نسبة من نسبة أو نضيف نسبة إلى نسبة، أو نخرج من نقطة عموداً على خط من الخطوط المتخيلة في الهيئة، أو نعمل مثلثاً على خط من خطوط الهيئة. وجميع هذه المعاني ترجع إلى علم العدد أو علم الهندسة. وقد نذكر فيها عمل آلات تُرصد بها الكواكب، وليس يدخل في جملة العلوم التعليمية النظرية.

وأما المعاني العلمية من علم الموسيقى فهو مثل قولنا : الاتفاق الذي بالكل هو مؤلف من الاتفاق الذي بالأربع والاتفاق الذي بالخمس. ومثل قولنا : إن ⟨الاتفاق⟩ الذي بالكل مرتين مؤلف من خمس عشرة نغمة متفقة. ومثل قولنا : إن الاتفاق الذي بالأربع ينقسم إلى أكثر من طنين.

فأما المعاني العملية من علم الموسيقى فإنها تأليف النغم، وهي ترجع إلى علم العدد لأنها ترجع إلى تأليف النسب العددية.

فأما العمل بالموسيقى، أعني العمل باليد، الذي هو نقر الأوتار والآلات وتأليف الأصوات فليس يدخل في جملة النظر.

وليس يوجد في واحد من العلوم التعليمية معنى يخرج من أن يكون علمياً أو عملياً.

ثم إن القسم العملي ينقسم إلى قسمين : محدود وغير محدود. فالمحدود مثل قولنا في جزئيات ⟨علم⟩ العدد : نريد أن نقسم عددين معلومين بنسبتين معلومتين، فإن لم يُشرط أن تكون إحدى النسبتين أعظم من نسبة أحد العددين المقسومين إلى الآخر، وتكون النسبة الأخرى أصغر من نسبة العددين المقسومين أحدهما إلى الآخر، لم يمكن أن يُقسم

1 الجوزاء : الجوز [ب] / إلى : من الى [س] – 3 تكون : يكون [س] – 4 هو : ناقصة [ب] / نضيف : تنصيف [س] – 5 خط : نقطة [س] / خطوط : خوط [س] – 6 عمل : على [س] – 8 العلمية : العملية [ب] – 9 بالأربع : باربع، ثم أثبت «لا» فوقها [ب] باربع [س] – 10 خمس عشرة : خمسة عشر [ب، س] – / متفقة : متقفه [ب] – 12 علم : علم المعاني [س] – 14 نقر : يقدر [ب] – 19 إحدى : احد [س] – 19-20 إلى الآخر... الأخرى : ناقصة [ب] – 20 أصغر ... المقسومين : ناقصة [ب]

l'on divise ces deux nombres selon ces deux rapports[4] — cette condition est appelée discussion; et à l'exemple de notre énoncé: trouver le plus grand nombre qui mesure deux nombres connus; si on n'impose pas aux deux nombres la condition qu'ils soient commensurables, il ne peut exister un nombre qui les mesure — cette condition est la discussion; et à l'exemple de notre énoncé: trouver un troisième nombre en proportion avec deux nombres connus[5]; si on n'impose pas aux deux nombres la condition qu'ils soient commensurables, il ne peut exister un troisième nombre en proportion avec ces deux nombres.

Ce qui est avec discussion dans les parties de la géométrie est à l'exemple de notre énoncé: construire à partir de trois droites données un triangle; si nous n'imposons pas aux droites la condition que la somme de toute paire de deux d'entre elles soit plus grande que la troisième, on ne pourra pas construire un
S-317r triangle à partir de ces trois droites; et à l'exemple de notre énoncé:/ mener dans un cercle connu une corde égale à une droite connue; si nous n'imposons pas à la droite la condition qu'elle ne soit pas plus grande que le diamètre de ce cercle, on ne pourra pas mener la corde dans le cercle; et à l'exemple de notre énoncé: mener d'un point connu à une droite connue une droite qui lui soit perpendiculaire; si nous n'imposons pas à la droite la condition qu'elle ne soit pas finie, alors peut-être ceci ne sera-t-il pas possible. Ces trois conditions sont la discussion de ces trois propositions.

L'astronomie et la musique ne comportent pas, quant à elles, de discussion, car elles ne contiennent de notions pratiques que dans leurs démonstrations et dans leurs syllogismes; et tout ce qui est dans ces procédés est numérique ou géométrique, et leur discussion appartient à la discussion dans la science des nombres et dans la géométrie.

La partie sans discussion se partage en deux subdivisions, l'indéterminé et le non-indéterminé. L'indéterminé est celui qui a plusieurs solutions, et le
B-70v non-indéterminé / est celui qui a une seule solution, c'est-à-dire qui ne s'achève que d'une seule manière.

4. Si a et b sont les nombres donnés, k_1 et k_2 les rapports donnés, on cherche a_1 et a_2, b_1 et b_2 tels que $a_1+a_2=a$, $b_1+b_2=b$, $a_1/b_1=k_1$, $a_2/b_2=k_2$. Ce problème est le sixième du texte; on a montré que si $k_1<k_2$, il est nécessaire que $k_1<a/b<k_2$.

5. a et b étant donnés, trouver x tel que $\frac{a}{b}=\frac{b}{x}$, $x=\frac{b^2}{a}$.

ذانك العددان على تينك النسبتين، وهذا الشرط يسمى تحديداً. ومثل قولنا: نريد أن نجد أعظم عدد يعد عددين معلومين؛ فإن لم يُشرط في العددين أنهما مشتركان، لم يمكن أن يُوجد عدد يعدهما، وهذا الشرط هو التحديد. ومثل قولنا: نريد أن نجد عدداً ثالثاً مناسباً لعددين معلومين؛ فإن لم يُشرط في العددين أنهما مشتركان لم يمكن وجود عدد ثالث مناسب للعددين.

فأما ⟨المحدود في⟩ جزئيات الهندسة فمثل قولنا: نريد أن نعمل من ثلاثة خطوط مفروضة مثلثاً؛ فإن لم نشرط في الخطوط أن يكون كل اثنين منها أعظم من الثالث، لم يمكن أن نعمل من الخطوط الثلاثة مثلثاً. ومثل قولنا: نريد / أن نخرج في دائرة معلومة س - ٣١٧ - و وتراً مساوياً لخط معلوم؛ فإن لم نشرط في الخط أنه ليس بأعظم من قطر تلك الدائرة، لم يمكن إخراج الوتر فيها. ومثل قولنا: نريد أن نخرج من نقطة معلومة إلى خط مستقيم معلوم خطاً يكون عموداً عليه؛ فإن لم نشرط في الخط أنه غير متناهٍ، فربما لم يمكن ذلك فيه. فهذه الشروط الثلاثة هي تحديد هذه الأشكال الثلاثة.

فأما علم الهيئة وعلم الموسيقى فليس فيهما تحديد، لأنه ليس فيهما معانٍ عملية إلا في براهينهما ومقاييسهما. وجميع ما في تلك من الأعمال فهي عددية أو هندسية، وتحديدها هو داخل في تحديد العدد والهندسة.

ثم أن القسم الغير محدود ينقسم قسمين: سيّال وغير سيّال. فالسيّال ما له عدة أجوبة، وما ليس بسيّال / فهو الذي ليس له إلا جواب واحد، أعني أنه لا يتم إلا على ب - ٧٠ - ظ صفة واحدة.

2 يشرط: يشترط [ب] / مشتركان: مشتركين، وصياغة الجملة ركيكة والوجه أن يقال «فإن لم يشرط في العددين أن يكونا مشتركين» – 3 أن يوجد: وجود [س] / عدداً: عدد عدداً [ب] – 4 فإن: وان [س] / مشتركان: انظر التعليق السابق – 6 فمثل: مثل [ب] – 8 الثلاثة: الثلاث [س] – 9 تلك: ناقصة [ب] / لم يمكن: لم تمكن [س] – 10 خط: نقطة خط، ثم ضرب على «خط» بالقلم [س] – 12 فهذه: وهذه [س] – 14 وتحديدها: اوتحديدها [ب] ثم ضرب على الألف – 15 الهندسة: الهندسية [ب] – 16 الغير محدود: الأفصح «غير المحدود»، ولن نشير إلى مثلها فيما بعد – 18 واحدة: فوق السطر [س].

L'indéterminé dans les parties de la science des nombres est à l'exemple de notre énoncé: trouver deux nombres carrés tels que leur somme soit un carré. Cet énoncé peut avoir plusieurs solutions, c'est-à-dire qu'il peut exister de multiples carrés, en nombre infini, tels que chaque paire d'entre eux ait une somme carrée[6]; et à l'exemple de notre énoncé: trouver un nombre ayant des parties données; il peut se trouver de multiples nombres, en nombre infini, dont chacun a ces mêmes parties.

Et à l'exemple de notre énoncé dans les parties de la géométrie: construire un cercle qui soit tangent à deux cercles connus donnés; cette notion peut être construite de multiples manières, car le cercle construit peut être tangent aux deux cercles par sa convexité aux convexités des deux cercles; il peut être tangent à l'un des deux cercles par sa convexité à la convexité de celui-ci, et tangent à l'autre par sa concavité à la convexité de celui-là; il peut être tangent à chacun des deux cercles par sa concavité aux convexités des deux cercles — la construction de ce cercle se fait donc de trois manières[7]; et à l'exemple de notre énoncé: mener d'un point donné une droite tangente à un cercle donné[8]; cette construction se fait de deux manières, car si on joint ce point au centre du cercle par une droite, on peut mener de ce point deux droites de part et d'autre de cette droite, chacune d'elles étant tangente au cercle. Dans la science des nombres et la géométrie, les exemples de ces notions sont multiples; il peut y avoir dans les problèmes sans discussion des problèmes indéterminés, et les exemples que nous avons mentionnés sont suffisants pour tous.

Il ne peut y avoir dans l'astronomie de parties pratiques, si ce n'est dans ses démonstrations qui se ramènent à la science des nombres ou à la géométrie. Il reste qu'il peut se trouver parmi les mouvements des astres ceux qui peuvent se produire de deux manières, comme le mouvement du soleil qui peut être suivant deux orbes, dont l'un a pour centre le centre de l'Univers[9], et l'autre

6. L'expression risque d'être ambiguë. L'auteur veut dire qu'il existe des paires de nombres carrés, en nombre infini, telles que la somme des deux termes de chaque paire soit un carré.

7. Il s'agit ici de trois types de problèmes dont chacun a une infinité de solutions. Le cercle cherché peut avoir 1) un contact extérieur avec chacun des cercles donnés A et B; 2) un contact intérieur avec A et B; 3) un contact intérieur avec A (ou B) et extérieur avec B (ou A).

8. Il est sous-entendu que le point est à l'extérieur du cercle, sinon le problème comporte une discussion.

9. Il s'agit du cercle appelé *déférent*; son centre est U, centre de l'univers; le soleil S décrit l'épicycle dont le centre P décrit le déférent.

فأما السيّال من جزئيات ⟨علم⟩ العدد، فمثل قولنا: نريد أن نجد عددين مربعين يكون مجموعهما مربعاً، وهذا القول يكون له عدة أجوبة، أعني أنه يمكن أن يوجد مربعات كثيرة بلا نهاية يكون كل اثنين منها مجموعهما مربعٌ. ومثل قولنا: نريد أن نجد عدداً فيه أجزاء مفروضة، وقد توجد أعداد كثيرة بلا نهاية كل واحد منها له تلك الأجزاء بعينها.

ومثل قولنا في جزئيات الهندسة: نريد أن نعمل دائرة تماس دائرتين معلومتين مفروضتين. فإن هذا المعنى يمكن أن يُعمل بعدة وجوه، وذلك أنه يمكن أن تكون الدائرة المعمولة تماس الدائرتين بتحديبها لتحديبي الدائرتين، ويمكن أن تماس إحدى الدائرتين بتحديبها ⟨لتحديبها⟩ وتماس الأخرى بتقعيرها لتحديب الأخرى، ويمكن أن تماس كل واحدة من الدائرتين بتقعيرها لتحديبي الدائرتين؛ فيكون عمل هذه الدائرة بثلاثة أوجه. ومثل قولنا: نريد أن نخرج من نقطة مفروضة خطاً مستقيماً يماس دائرة مفروضة. وهذا العمل يقع على وجهين، لأنه إذا وُصل بين تلك النقطة وبين مركز الدائرة بخط مستقيم أمكن أن نخرج من تلك النقطة خطين عن جنبتي ذلك الخط، كل واحد منهما يماس الدائرة. وأمثال هذه المعاني كثير في العدد والهندسة، وقد يقع في المسائل ⟨غير⟩ المحدودة ما يكون سيّالاً، والأمثلة التي ذكرناها مقنعة في الجميع.

فأما الهيئة فليس يقع فيها أجزاء عملية إلا في براهينها التي ترجع إلى ⟨علم⟩ العدد والهندسة، إلا أنه قد يوجد في حركات الكواكب ما يمكن أن يكون على وجهين، مثل حركة الشمس التي يمكن أن تكون بفلكين: أحدهما مركزه مركز العالم، والآخر فلك

1 فأما: واما [س] / نجد: نجدد [ب] – 3 مربع: مربعا [ب، س] – 4 أعداد: او [س] – 7 يعمل: نعمل [ب] –
8 لتحديبي: لحدبتي [ب] – 10 لتحديبي: لمحدبى [ب] / الدائرة: الدائرتين [س] – 11 أوجه: اجوبة [ب] وجوه [س] –
13-14 بخط ... الدائرة: مكررة [ب] – 16 فأما: وأما [س] / الهيئة: الهندسة [س] – 18 تكون: يكون [س]

est son épicycle et a son centre sur le pourtour du premier; le mouvement du soleil peut être suivant un seul orbe[10] dont le centre est à l'extérieur du centre de l'Univers. Cette notion ne peut cependant pas être dite pratique, car elle-même n'est que suivant l'une des deux manières, et ne peut être suivant l'autre manière.

Il peut y avoir dans les parties de la musique des parties pratiques indéterminées; il reste que leur construction se ramène à la science des nombres, à l'exemple de notre énoncé: diviser l'intervalle d'octave dans les deux intervalles de quinte et de quarte; la division de cet intervalle a lieu en effet selon deux positions; nous pouvons faire en sorte que l'intervalle de quarte précède l'intervalle de quinte et nous pouvons faire en sorte que l'intervalle de quinte précède l'intervalle de quarte; et à l'exemple de notre énoncé: diviser l'intervalle de quarte en trois intervalles; cet intervalle, c'est-à-dire de quarte, se partage en deux tons et un reste; ce reste peut être à son début, ou il peut être en son milieu, ou il peut être à sa fin; la division est donc possible de trois manières, si ce n'est que ces subdivisions se ramènent à la science des nombres, car elles se partagent d'après la division des rapports numériques par lesquels les intervalles se trouvent selon ces rapports[11].

Il est clair à partir de tout ce que nous avons montré à propos de la division des parties des sciences mathématiques qu'elles se partagent d'abord en deux subdivisions. L'une des subdivisions se partage ensuite en trois subdivisions. Il s'ensuit que l'analyse des parties de ces sciences doit se partager suivant ces subdivisions. L'analyse de la partie théorique est d'un seul genre. L'analyse de la partie pratique est également d'un seul genre, mais elle se partage en trois espèces. Montrons maintenant comment est l'analyse de ces subdivisions.

L'analyse de la partie théorique est d'un seul genre. Il est vrai qu'une même
S-317v partie théorique peut être analysée de plusieurs / manières, mais ces manières ne relèvent néanmoins que d'un seul genre. Ceci en effet car, si ce qu'on

10. Cercle appelé parfois *excentrique*, dont le centre E est différent de U.

11. Les trois sections de la partie pratique sont les suivantes:
- avec discussion
- sans discussion: – déterminé
  – indéterminé

تدويره مركزه على محيط هذا الفلك؛ ويمكن أن تكون حركة الشمس بفلك واحد مركزه خارج عن مركز العالم، إلا أن هذا المعنى ليس عمليا لأنه ليس هو في نفسه إلا على أحد هذين الوجهين ولا يجوز أن يكون على الوجه الآخر.

فأما جزئيات علم الموسيقى فقد يقع فيها أجزاء عملية سيّالة، إلا أن أعمالها ترجع إلى علم العدد، مثل قولنا : نريد أن نقسم الاتفاق الذي بالكل إلى الاتفاقين اللذين بالخمسة وبالأربعة؛ فإن قسمة هذا الاتفاق تقع في موضعين؛ وذلك أنه يمكن أن نجعل الاتفاق الذي بالأربعة يتقدم الاتفاق الذي بالخمسة، ويمكن أن نجعل الاتفاق الذي بالخمسة يتقدم الاتفاق الذي بالأربعة. ومثل قولنا : نريد أن نقسم الاتفاق الذي بالأربعة إلى ثلاثة اتفاقات؛ وهذا الاتفاق، أعني الذي بالأربع ينقسم إلى طنين وبقية؛ وهذه البقية يمكن أن تكون في وسطها ويمكن أن تكون في أولها ويمكن أن تكون في آخرها؛ فيكون هذه القسمة ممكنة على ثلاثة أوجه، إلا أن هذه الأقسام ترجع إلى علم العدد لأنها إنما تنقسم بقسمة النسب العددية التي الاتفاقات على نسبها.

فقد تبيّن من جميع ما بيّناه من قسمة أجزاء العلوم التعليمية أنها تنقسم أولاً إلى قسمين، ثم أن أحد القسمين ينقسم إلى ثلاثة أقسام. فيلزم من ذلك أن يكون تحليل جزئيات هذه العلوم ينقسم إلى هذه الأقسام. أما القسم العلمي فتحليله يكون من جنس واحد. وأما الجزء العملي فتحليله يكون أيضاً من جنس واحد إلا أنه يكون منقسماً إلى ثلاثة أنواع. فلنبيّن الآن كيفية تحليل هذه الأقسام.

أما تحليل القسم العلمي فإنه يكون من جنس واحد إلا أنه مع ذلك قد يمكن أن يحلل الجزء الواحد العلمي بعدة / وجوه، إلا أنه ليس تخرج تلك الوجوه من أن تكون من جنس واحد؛ وذلك أن المبحوث عنه إذا كان علمياً فتحليله يجب أن يكون بطلب س - ٣١٧ - ظ

1 تدويره : تدوير [س] / تكون : يكون [س] – 2 ليس : ليس لا يسمى [س] – 3 على (الثانية) : ناقصة [س] – 4 ترجع : يرجع [ب] – 6 فإن : الذي [ب] / قسمة : قسمه [ب] – 7 الاتفاق (الثانية) : بالاتفاق [ب] الاتفاق من [س] – 10 البقية : النقطة، وكتب بعدها «يمكن أن يكون في أول الأقسام و» [س] – 11 ترجع : يرجع [ب] –13 تبين : يتبين [ب] – 16 يكون أيضًا : ايضا يكون [س] – 18 يكون : ناقصة [س] / ذلك : ناقصة [س] – 19 أنه : انها [ب، س] / تكون : يكون [س].

recherche est théorique, son analyse doit se faire par la poursuite des propriétés de l'objet de la notion recherchée seulement. Si donc il est analysé de plusieurs manières, c'est-à-dire si on suit dans son analyse plusieurs méthodes, alors son analyse, pour chacune de ces méthodes, ne se fait que par la poursuite de ses propriétés, une fois supposé que ce qui est demandé est donné d'une manière complètement achevée, et parfaite. Si on ne trouve pas, de quelque manière, pour ce demandé, des propriétés qui mènent à une propriété qui existe en lui, telle que, lorsqu'on la compose avec d'autres elle produise ce demandé, il faut alors que l'analyste ajoute à cet objet des ajouts qui ne l'éloignent pas de sa réalité; il doit ensuite examiner les propriétés de l'objet — il faut en effet que d'autres propriétés adviennent à l'objet en raison de cet ajout; si, avec cet ajout, s'achève l'analyse, alors c'est celle qui, si on l'inverse, produit le demandé; sinon, on ajoute à cet ajout un autre ajout, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'adviennent, avec les ajouts, des propriétés qui, une fois inversées et composées, produisent le recherché. Ces ajouts ne peuvent se faire que par une intuition dans l'art, par laquelle on saisit les prémisses. Cette intuition est celle que nous avons mentionnée précédemment, et la loi de cette intuition est de rechercher un ajout tel que, si on le joint au premier objet, il résulte de leur réunion une propriété ou des propriétés qui n'existaient pas avant cet ajout. Si l'analyste se tient dans cette voie, il ne peut qu'aboutir à une propriété donnée, ou à une propriété fausse. Si cette voie mène à une propriété donnée, alors la notion recherchée est valide et a une réalité; mais si
B-71r cette voie aboutit à une propriété fausse, la notion / recherchée est fausse et n'a pas de réalité. Nous allons montrer ensuite par des exemples comment on ajoute ces ajouts, comment on cherche leurs propriétés, comment on les inverse et comment on les compose.

Si l'analyse mène ensuite à une propriété donnée et qui a une réalité, alors, si on compose cette analyse, on montre à partir d'elle par la vraie démonstration que la notion recherchée est vraie et indubitable. Mais, si l'analyse mène à une donnée impossible, ceci indique que la notion recherchée est impossible, et l'analyse elle-même sera une démonstration de la fausseté de l'assertion, si

خواص موضوع ذلك المعنى المبحوث عنه فقط. وإن حُلل بعدة وجوه، أعني إن سُلك في تحليله عدة من الطرق، فليس يكون تحليله في كل واحد من الطرق إلا بطلب خواصه فقط من بعد أن يُفرض ذلك المطلوب معطى على غاية تمامه وكماله. وإن لم يوجد لذلك المطلوب بوجه من الوجوه خواص تؤدي إلى خاصة موجودة له متى رُكبت مع غيرها أنتجت ذلك المطلوب، فينبغي للمحلل أن يزيد على ذلك الموضوع زيادات لا تخرجه عن حقيقته، ثم ينظر في خواص ذلك الموضوع مع الزيادة، فإنه لا بد أن يحدث له خواصُ أخر من أجل تلك الزيادة، فإنْ تمّ بتلك الزيادة التحليل ‹فهو› الذي إذا عكس أنتج المطلوب، وإلا زيد على تلك الزيادة زيادة أخرى، كذلك دائماً إلى أن يحدث من الزيادات خواص مُعطاة متى عُكست ورُكبت أنتجت المطلوب. وهذه الزيادات ليس تكون إلا بحدس صناعي هو الذي به تُتصيد المقدمات؛ وهذا الحدس هو الذي ذكرناه فيما تقدم من هذا القول؛ والقانون في هذا الحدس هو أن يتطلب زيادة متى أضيفت إلى الموضوع الأول حدث من مجموعهما خاصة أو خواص لم تكن موجودة قبل تلك الزيادة. فإن المحلل إذا تحرى هذه الطريقة لم يكن بُدّ من أن ينتهي إلى خاصة مُعطاة أو خاصة باطلة. فإن أدت هذه الطريقة إلى خاصة معطاة فإن المعنى المبحوث عنه صحيح وله حقيقة، وإن انتهت هذه الطريقة إلى خاصة باطلة فإن المعنى / المبحوث عنه باطل ولا حقيقة له. وسنبين من بعد بالأمثلة كيف يزاد هذه الزيادات وكيف يُبحث عن خواصها وكيف تُعكس وكيف تركب. ب - ٧١ - و

ثم إن التحليل إذا أدى إلى خاصة معطاة لها حقيقة، فإن ذلك التحليل إذا رُكب تبيّن منه بالبرهان الحقيقي أن المعنى المبحوث عنه حق وليس فيه شك. وإذا أدى التحليل إلى مفروض محال دلّ ذلك على أن المعنى المبحوث عنه محال. ويكون ذلك التحليل بعينه برهاناً على بطلان الدعوى، إذا جُعل التحليل برهاناً بالخلف، لأن برهان

2 بطلب : يُطلب [ب] – 3 ذلك المطلوب : المفروض [س] / معطى : معطا [س] – 4 المطلوب : الموضوع [س] – 8 زيادة أخرى : ثانية [س] – 12 أضيف : اضيف [س] / تكن : يمكن [س] – 13 تلك : ناقصة [س] / تحرى : تجرى [ب، س] – 15 هذه الطريقة : الزيادات وتلك الخواص [س] – 18 لها : ولها [س] – 19 أدى : تأدى [ب]

l'analyse est faite comme démonstration par l'absurde; la démonstration par l'absurde revient en effet à supposer l'assertion selon ce qui y était consigné, pour ensuite examiner ses conséquences nécessaires. Mais on a supposé dans l'analyse qui mène à l'impossible l'assertion selon ce qui y a été consigné, pour ensuite examiner ses conséquences nécessaires; ces conséquences ont donc mené à l'impossible. L'analyse qui mène à l'impossible est donc une démonstration par l'absurde de la fausseté de la notion recherchée. C'est de cette manière que se fait l'analyse des parties théoriques des notions mathématiques, ainsi que leur synthèse.

L'analyse de la partie pratique est du genre des procédés ingénieux. On cherche en effet à faire quelque chose qui soit de ces pratiques subtiles, or toutes les pratiques subtiles sont du genre des procédés ingénieux. La première chose que l'analyste doit faire à propos de l'analyse de ces parties pratiques, est, après avoir supposé que le recherché est complètement achevé et parfait, d'examiner ses conséquences nécessaires, s'il existe suivant la qualité demandée dans la pratique, et d'examiner ce qui s'ensuit nécessairement de ces propriétés, et ce qui s'ensuit nécessairement de ses dernières conséquences, jusqu'à ce qu'il aboutisse à une chose donnée, comme nous l'avons montré dans l'analyse de la partie théorique. S'il n'apparaît pas à l'analyste de propriétés qui mènent au recherché, il ajoute à l'objet des ajouts, à partir desquels des propriétés s'engendrent, comme nous en avons montré l'exemple dans la partie théorique, et il examine les propriétés de ce qui se produit jusqu'à ce qu'il aboutisse à une chose donnée; s'il aboutit ainsi à une chose donnée, il examine alors pour chacune de ces propriétés comment on peut trouver cette propriété, et comment concevoir l'astuce pour la trouver, pour qu'elle ait lieu, et qu'elle se réalise selon la qualité qui dérive nécessairement de la forme de la notion dont on cherche l'existence. Dans sa réflexion sur le mode de découverte de chacune de ces propriétés, et sur l'imagination d'une ruse pour faire venir cette forme à l'existence, il lui apparaît que cette propriété requiert une condition et une discussion, ou n'en requiert pas. Si elle est de ces propriétés qui requièrent une condition, alors il lui apparaît que cette propriété peut ne pas exister, que son existence peut n'avoir pas lieu ou qu'elle peut exister. C'est lorsqu'il met ainsi en balance qu'il lui apparaît que le recherché requiert une discussion. C'est alors qu'il faut qu'il suppose

الخلف هو أن نفرض الدعوى على ما ادّعي فيها ويُنظر فيما يلزم منها. والتحليل المؤدي إلى المحال قد فُرض فيه الدعوى على ما ادّعي فيها ثم نظر في لوازمها، فأدت تلك اللوازم إلى المحال؛ فالتحليل المؤدي إلى المحال هو برهان بالخلف على بطلان المعنى المبحوث عنه. فعلى هذه الصفة يكون تحليل الجزئيات العلمية من المعاني التعليمية وتركيبها.

فاما تحليل القسم العملي فإنه من جنس الحيل. وذلك أن المطلوب هو عمل شيء من الأشياء ومع ذلك فهو من الأعمال اللطيفة، وجميع الأعمال اللطيفة هي من جنس الحيل. فاول ما ينبغي أن يعمله المحلل في تحليل الأجزاء العملية من بعد أن يفرض المطلوب على غاية التمام والكمال هو أن ينظر في خواصه اللازمة له إذا كان موجوداً على الصفة المطلوبة في العمل، وينظر ما يلزم من تلك الخواص وما يلزم من لوازمها إلى أن ينتهي إلى شيء معطى على مثل ما بينّا في تحليل القسم العلمي. فإن لم يظهر للمحلل خواص تؤدي إلى المطلوب زاد في الموضوع زيادات تتولد منها خواص على ما مثّلنا في القسم العلمي، وينظر في خواص ما يحدث إلى أن ينتهي إلى شيء معطى؛ فإذا انتهى إلى شيء معطى فحينئذ ينظر في كل واحد من تلك الخواص: كيف يمكن أن توجد تلك الخاصة وكيف يعمل الحيلة في وجودها ووقوعها وإخراجها إلى الفعل على الصفة التي تلزم من صورة المعنى المطلوب وجوده. وفي تأمله لكيفية وجود كل واحد من تلك الخواص وتمحل الحيلة في إخراج تلك الخاصة إلى الوجود يظهر أن تلك الخاصة تحتاج إلى شرط وتحديد أو لا تحتاج. فإن كانت من الخواص التي تحتاج إلى شرط فإنه يظهر له أن تلك الخاصة ربما لم يمكن أن توجد ولا يقع وجودها، وربما أمكن أن توجد، فعند هذا الترجح يظهر أن المطلوب يحتاج إلى تحديد؛ فحينئذ يجب أن يفرض وجود تلك

1 فيما: فيها [س] – 3 المؤدي: الذي يؤدي [س] – 5 العملي: العمل [س] – 6 الأشياء ... وجميع: ناقصة [ب] – 7 في: من [ب، س] / العملية: العلمية [س] / يفرض: نفرض [ب] – 8 التمام والكمال: تمامه وكماله [س] – 10 العلمي: العملي [ب، س] / للمحلل: للمحل [ب] – 11 إلى: ناقصة [ب] / تتولد: يتولد [ب] – 12 العلمي: العملي [ب، س] وكتب بعدها «وينظر العلمي» [س] – 13 توجد: يوجد [س] – 14 ووقوعها: وقوعها [س] – 16 الخاصة (الأولى): الصورة [ب] – 17 الخواص: خواص [س] – 18 توجد: يوجد [س] / يقع: يتم [س] / أن توجد: وجودها [س]

l'existence de cette propriété ou de cette notion dont l'existence l'a emporté, et se demande quand il est possible qu'elle s'achève, et quand il n'est pas possible qu'elle s'achève. Si alors la qualité par laquelle s'achève la découverte de cette propriété ou de ce recherché se fixe pour l'analyste, l'analyse s'achève, et s'achève la découverte du recherché. Si dans sa réflexion et sa considération astucieuse du moyen de trouver les propriétés et les notions par lesquelles s'achève le recherché, il ne rencontre rien d'impossible pour les trouver qui s'oppose à une partie d'entre elles, alors ce recherché ne requiert ni condition ni discussion. Dans ce cas, il s'applique à faire passer à l'acte ces propriétés qui sont apparues; mais en faisant passer à l'acte ces propriétés et ces notions, il lui apparaît que ces propriétés, ou l'une de ces propriétés, s'achèvent de plusieurs manières, ou ne s'achèvent que d'une seule manière. Si chacune de ces propriétés ne s'achève que d'une seule manière, alors ce qu'on recherche n'est pas indéterminé. Et si ces propriétés, ou l'une d'elles, s'achèvent de plusieurs manières, alors ce qu'on recherche s'achève de plusieurs manières. Si donc l'analyse, dans cette partie, aboutit également à l'impossible, alors ce
S-318r qu'on recherche ne s'achève pas. Toutes ces subdivisions,/ qui constituent l'analyse de la partie pratique, sont d'un même genre, et la méthode pour les analyser est semblable à l'analyse de la partie théorique, à cette différence près entre l'analyse de la partie théorique et l'analyse de la partie pratique, que l'analyse de la partie théorique est une recherche d'une propriété qui appartient à la notion recherchée et qui existe en elle, alors que l'analyse de la partie pratique consiste à concevoir la ruse pour trouver la notion demandée et pour la faire passer à l'acte, et la méthode pour la trouver et la faire passer à l'acte est de faire passer à l'acte chacune des propriétés qui apparaissent dans l'analyse.

Ce que nous venons d'exposer est l'ensemble des parties de l'analyse, et le mode de chacune de ces parties; quand nous mentionnerons les exemples, chacune de ces parties va s'éclairer et se dévoiler, et apparaîtront le mode de l'art de l'analyse et son existence en acte.

Quant aux lois de cet art et à ses fondements, sur lesquels s'achève la découverte des propriétés et la saisie des prémisses, et qui sont les bases des

الخاصة أو ذلك المعنى الذي ترجح وجوده وينظر متى يمكن أن يتم ومتى لا يمكن أن يتم، فإذا تحررت له الصفة التي معها يتم وجود تلك الخاصة أو ذلك المطلوب فقد تم التحليل وتم وجود المطلوب. وإن كان في تامله وتمحله لكيفية وجود الخواص والمعاني التي بها يتم المطلوب لا يعترضه في وجودها محال يمنع من شيء منها فإن ذلك المطلوب لا يحتاج إلى شرط ولا إلى تحديد. فعند هذه الحال يعتمد إخراج تلك الخواص التي ظهرت إلى الفعل، ⟨و⟩ما يعمل في إخراجه لتلك الخواص وتلك المعاني إلى الفعل يُظهر له أن تلك الخواص أو أحد تلك الخواص يتم بعدّة وجوه أو لا يتم إلا بوجه واحد. فإن كانت كل واحدة من تلك الخواص لا تتم إلا على وجه واحد، فالمطلوب غير سيّال، وإن كانت الخواص أو واحدة منها تتم بعدة وجوه فإن ذلك المطلوب يتم بعدة وجوه. فإن انتهى التحليل في هذا القسم أيضاً إلى المحال فإن ذلك المطلوب لا يتم.

وجميع هذه الأقسام / التي هي تحليل القسم العملي من جنس واحد، وطريق تحليلها هو س – ٣١٨ – و شبيه بتحليل القسم العلمي، إلا أن الفرق بين تحليل القسم العلمي وبين تحليل القسم العملي هو أن تحليل القسم العلمي هو بحث عن خاصة هي للمعنى المبحوث عنه وموجودة فيه، وتحليل القسم العملي هو تمحل الحيلة في وجود المعنى المطلوب وإخراجه إلى الفعل، وطريق وجوده وإخراجه إلى الفعل هو إخراج كل واحدة من الخواص التي تظهر في التحليل إلى الفعل.

فهذا الذي ذكرناه هو جميع أقسام التحليل وكيفية كل قسم من أقسامه، وعند ذكرنا الأمثلة يتضح كل واحد من هذه الأقسام وينكشف، ويظهر كيفية صناعة التحليل ووجودها بالفعل.

فأما قوانين هذه الصناعة وأصولها التي بها يتم وجود الخواص وتصيد المقدمات،

1 أو: و[س] – 2 تحررت: تجردت [س] – 4 بها يتم: مما تم [س] / يعترضه: يعرضه [س] – 5 إلى: ناقصة [ب] / يعتمد: نعتمد [ب] – 6 ما يعمل: بالعمل و[ب] – 7 يتم: تم [س] / لا: ناقصة [س] – 8 واحدة: واحد [س] / تتم: يتم [س] – 9 واحدة: واحد [س] / تتم: يتم [س] – 10 فإن: وان [س] / التحليل: تحليل [س] / في: ناقصة [س] – 13 تحليل: ناقصة [س] / للمعنى: بالمعنى [س] – 15 وطريق: فطريق [س] – 16 تظهر: يظهر [س]

mathématiques, dont nous avons dit précédemment que la connaissance préalable est en effet nécessaire à l'achèvement de l'art de l'analyse; ce sont les notions appelées «les connus». Les connus se partagent en cinq parties, qui sont: le connu en nombre, le connu en grandeur, le connu en rapport, le connu en position, le connu en forme. Le livre d'Euclide rendu par *Les Données* comprend de nombreuses notions de ces connus, qui sont parmi les instruments de l'art de l'analyse; et la majeure partie de l'art de l'analyse est fondée sur ces notions, à ceci près qu'il reste d'autres notions des connus dont on ne peut se dispenser dans l'art de l'analyse, et dont on a besoin dans de nombreuses occurrences, déduites par l'analyse, qui ne sont pas contenues dans ce livre, et que nous n'avons trouvées dans aucun livre. Nous montrons B-71v dans ce livre ce que nous utilisons / des connus dans les exemples de l'analyse de ce traité, ce qui existe dans les livres, et également ce qui n'est pas mentionné. Nous résumons chacune de ces notions connues, et nous dévoilons sa réalité; et nous engagerons dorénavant pour les connus un traité indépendant, après avoir achevé ce traité, dans lequel nous montrons les essences des notions connues que l'on utilise dans les sciences mathématiques; nous traiterons exhaustivement toutes ces parties, et nous mentionnerons tout ce qui les concerne.

Nous disons ici: le connu, en termes généraux, est ce qui ne change pas, car toute chose qui change et qui a dans sa nature le changement, n'a pas de réalité déterminée, ni assignable. Si elle n'a pas une réalité déterminée et assignable qui soit son essence, il n'est pas juste qu'elle soit connue, car il est possible que tout ce qu'on connaît d'elle change de ce qu'il a été; la chose ne sera connue que si elle est fixe, selon un seul état, qui est son essence, qui lui est propre. S'il en est ainsi, le connu est ce qui ne change pas. Maintenant que l'essence du connu est mise en place, expliquons alors chacune des notions connues que nous avions mentionnées précédemment et qui sont les matériaux de l'art de l'analyse.

Nous disons: le connu en nombre est celui dont le nombre ne change pas, et le nombre est une unité ou une somme composée d'unités; le connu en

وهي من أصول التعاليم التي قدمنا القول بأن صناعة التحليل لا تتم إلا بتقديم العلم بها، فهي المعاني التي تسمى المعلومات. والمعلومات تنقسم إلى خمسة أقسام هي: المعلوم العدد، والمعلوم المقدار، والمعلوم النسبة، والمعلوم الوضع، والمعلوم الصورة. وكتاب أقليدس المترجم بالمعطيات يشتمل على معانٍ كثيرة من هذه المعلومات هي من آلات صناعة التحليل؛ وأكثر صناعة التحليل مبنية على تلك المعاني، إلا أنه قد بقيت معانٍ أخر من المعلومات التي لا يُستغنى عنها في صناعة التحليل ويُفتقر إليها في كثير من الجزئيات المستنبطة بالتحليل لم يتضمنها ذلك الكتاب ولا وجدناها في شيء من الكتب. ونحن نبين في هذا الكتاب ما نستعمله / من المعلومات في أمثلة التحليل من هذه المقالة ب – ٧١ – ظ مما هو موجود في الكتب ومما لم يذكر أيضاً، ونلخص كل واحد من المعاني المعلومة ونكشف حقيقته، ثم نستأنف للمعلومات مقالة مفردة من بعد فراغنا من هذه المقالة نبيّن فيها مائيات المعاني المعلومة التي نستعمل في علوم التعاليم ونستوفي جميع أقسامها، ونذكر سائر ما يتعلق بها.

فنقول هاهنا: إن المعلوم بالقول الكلي هو الذي لا يتغير، وذلك أن كل شيء يتغير وفي طبيعته التغير فلا حقيقة له تُعيّن ويُشار إليها. وإذا لم تكن له حقيقة معينة ومُشار إليها هي مائيته فليس يصح أن يُعلم لأن كل ما نعلم منه، فهو يحتمل أن يتغير عما هو عليه، فليس يكون الشيء معلوماً إلا إذا كان ثابتاً على حالٍ واحدة هي مائيته التي تخصه. وإذا كان ذلك كذلك فالمعلوم هو الذي لا يتغير، وإذْ قد استقرت مائية المعلوم، فلنشرح كل واحد من المعاني المعلومة التي تقدم ذكرها التي هي مواد صناعة التحليل.

فنقول: إن المعلوم العدد هو الذي لا يتغير عدده، والعدد هو وحدة أو جملة مركبة

1 من: أثبتها في الهامش [ب] قد تقرأ «عن» [س] / بأن: فيها وان [ب] / تتم: يتم [س] – 2 نسمى: يسمى [س] – 4 معانٍ: معانى [ب، س] – 5 معانٍ: معانى [ب، س] – 6 عنها: عنها [س] – 8 نستعمله: يستعمله [ب] يستعمل [س] / من (الأولى): ناقصة [س] مكررة [ب] – 10 ونكشف: ويكشف [س] – 11 نستعمل: يستعمل [س] / ونستوفي: ومستوفى [س] – 14 تكن: يكن [س] – 15 يحتمل: محتمل [ب] – 16 عليه: ناقصة [س] – 17 يتغير: يتغيره [س] / مائية: مائيته [ب، س] – 18 فلنشرح: فلتشرح في [س] – 19 مركبة: مركيبة [ب]

nombre est celui dont les unités ne changent pas, c'est-à-dire n'augmentent ni ne diminuent. Le connu en grandeur est celui dont les grandeurs ne changent pas, car le connu est ce qui ne change pas. Ce qui est connu d'une chose de grandeur connue est sa grandeur. Le connu en grandeur est celui dont la grandeur ne change pas. Les grandeurs se partagent en deux parties, naturelles et imaginaires. Les grandeurs naturelles sont les corps sensibles, leurs surfaces, leurs dimensions, qui sont leur longueur, leur largeur et leur profondeur. Les grandeurs imaginaires sont les grandeurs abstraites par l'imagination à partir des grandeurs sensibles; ce sont les dimensions qui sont la droite, la surface, et le solide mathématique. Nous avons déterminé ces notions dans notre livre à propos du *Commentaire des postulats d'Euclide*; et à part cela, ces notions sont fameuses chez quiconque a touché à la géométrie: leur célébrité nous dispense de les déterminer en cet endroit. Le connu en grandeur est celui dont la grandeur ne change pas; mais la grandeur est la dimension ou les dimensions, donc le connu en grandeur est celui dont la dimension ou les dimensions ne changent pas, c'est-à-dire que sa dimension ou ses dimensions n'augmentent ni ne diminuent.

Le connu en rapport est celui dont le rapport ne change pas. Mais le rapport est la mesure de la quantité de ce qui est rapporté à la quantité de ce à quoi on le rapporte. Mais le rapport ne peut être que entre deux grandeurs d'une même espèce, et qui sont réunies sous une même définition. Le rapport est dans les deux espèces, qui sont les nombres[12] et les grandeurs. Quant au rapport qui est dans les nombres qui sont plus grands que un, il revient entièrement à une seule base, qui est: l'un des deux nombres est des parties de l'autre nombre, si on rapporte le plus petit au plus grand, et si on rapporte le plus grand au plus petit; et si on rapporte les égaux l'un à l'autre, chacun d'eux sera des parties de l'autre tout en lui étant égal, car chacune des unités qui sont dans le nombre est une partie de l'autre nombre, et tout nombre plus grand que un est une réunion d'unités; et tout nombre est des parties de tout nombre; ainsi pour deux nombres, l'un est des parties de l'autre; le connu en rapport, parmi les nombres, ce sont deux nombres dont les parties de l'un par rapport à l'autre ne changent pas, c'est-à-dire que les unités de chacun d'eux n'augmentent ni ne diminuent. Quant au rapport qui est dans les grandeurs, il se partage en deux parties: un rapport numérique, et un rapport non numérique. Nous avons montré la distinction de chacun de ces deux rapports

12. Littéralement: «le nombre» — singulier qui désigne un pluriel.

من وحدات ؛ فالمعلوم العدد هو الذي وحداته لا تتغير، أي لا تزيد ولا تنقص. والمعلوم القدر هو الذي لا يتغير مقداره لأن المعلوم هو الذي لا يتغير. والمعلوم من الشيء المعلوم القدر هو مقداره، فالمعلوم القدر هو الذي لا يتغير مقداره. والمقادير تنقسم قسمين: طبيعية وخيالية. فالمقادير الطبيعية هي الأجسام المحسوسة وسطوحها وأبعادها التي هي أطوالها وعروضها وأعماقها. والمقادير الخيالية هي الأبعاد المنتزعة بالتخيل من المقادير المحسوسة، وهذه الأبعاد هي الخط والسطح والجسم التعليمي. وقد حددنا هذه المعاني في كتابنا في شرح مصادرات كتاب أقليدس، ومع ذلك فإن هذه المعاني هي مشهورة عند كل من شدا شيئاً من علم الهندسة؛ وشهرتها تغني عن تحديدها في هذا الموضع. فالمعلوم القدر هو الذي لا يتغير مقداره، والمقدار هو البعد أو الأبعاد، فالمعلوم القدر هو الذي لا يتغيّر بُعده أو أبعاده، أي لا يزيد بُعده أو أبعاده ولا ينقص.

والمعلوم النسبة هو الذي لا تتغير نسبته. والنسبة هي قياس كمية المنسوب إلى كمية المنسوب إليه، وليس تكون النسبة إلا في مقدارين من نوع واحد ويجتمعان تحت حدّ واحد. والنسبة تكون في نوعين هما العدد والمقادير. فأما النسبة التي في العدد الذي هو أكثر من واحد فإنها ترجع كلها إلى أصل واحد وهو أن أحد العددين يكون أجزاء من العدد الآخر إنْ نُسب الأصغر إلى الأعظم وإنْ نُسب الأعظم إلى الأصغر، وإنْ نُسب المتساويان أحدهما إلى الآخر كان كل واحد منهما أجزاءً من الآخر مع تساويهما، وذلك أن كل واحدة من الوحدات التي في العدد هي جزءٌ من العدد الآخر، وكل عدد أكثر من واحد فهو وحدات مجتمعة، وكل عدد فهو أجزاء من كل عدد، فكل عددين فإن أحدهما أجزاء من الآخر؛ فالمعلوم النسبة من الأعداد هما العددان اللذان لا تتغير أجزاء أحدهما من الآخر، أي لا تزيد وحدات كل واحد منهما ولا تنقص. فأما النسبة التي في المقادير فإنها تنقسم قسمين: نسبة عددية ونسبة غير عددية. وقد بينا تفصيل كل واحدة

1 وحداته: وجد انه [ب] / تتغير: يتغير [ب، س] – 3 تنقسم: ينقسم [س] / قسمين: ناقصة [س]، فعل «انقسم» لازم يتعدى بحرف الجر «إلى» وسنتركها كما هي ولن نشير إليها مرة أخرى – 8 وشهرتها: وشهر بها [ب] – 11 نسبته: بنسبته [س] – 12 تكون: يكون [س] – 14 من (الثانية): ناقصة [ب] – 16 أجزاء من: أجزائه [س] – 17 من (الأولى): ناقصة [س] – 18 فإن: وان [ب] – 19 هما: الضمير مثنى وهو يعود على مفرد: «المعلوم» وسنتركها دون إشارة فيما بعد – 21 نسبة: بنسبة [س] / ونسبة: وبنسبة [س]

dans notre livre sur le *Commentaire des Postulats* ⟨d'Euclide⟩, et nous y avons montré que chacun de ces deux rapports existe dans les grandeurs. Nous éclairons ici chacun de ces deux rapports par un bref propos, à partir duquel on éclaire leur sens. Le rapport numérique qui est entre deux grandeurs est
S-318v celui / par lequel le rapport de l'une de ses deux grandeurs à l'autre est égal au rapport d'un nombre à un nombre. Et le rapport non numérique est celui par lequel le rapport de ses deux grandeurs n'est pas le rapport d'un nombre à un nombre; mais le rapport par lequel l'une de ses deux grandeurs à l'autre est le rapport d'un nombre à un nombre, est celui par lequel l'une de ses deux grandeurs est une partie ou des parties de l'autre, c'est-à-dire que nous pouvons partager chacune d'elles en parties égales, de sorte que chacune des parties de l'une soit égale à chacune des parties de l'autre, ou que l'une soit mesurée par l'autre. Le rapport non numérique est celui pour lequel ceci n'est pas possible.

Le rapport connu, qui est entre deux grandeurs, se partage en deux parties. L'une des parties est lorsque le rapport de l'une des deux grandeurs à l'autre est égal au rapport d'un nombre connu à un nombre connu et l'autre partie est lorsque le rapport de l'une des deux grandeurs à l'autre est égal au rapport d'une grandeur connue, qu'on peut trouver et repérer, à une grandeur connue, qu'on peut trouver et repérer. Il est possible de réunir les deux parties sous cette partie; on dit alors: le rapport connu qui est entre deux grandeurs est tel que le rapport de l'une de ses deux grandeurs à l'autre est égal à un rapport d'une grandeur connue qu'on peut trouver et repérer, à une grandeur connue qu'on peut trouver et repérer; car, pour deux grandeurs dont le rapport de l'une à l'autre est égal au rapport d'un nombre connu à un nombre connu, il est possible de trouver deux grandeurs suivant leur rapport. Le rapport connu entre deux grandeurs est donc tel qu'on peut trouver deux grandeurs connues suivant le rapport de ses deux grandeurs. Si on trouve deux grandeurs connues suivant le rapport de deux grandeurs, alors le rapport entre ces deux grandeurs ne change pas, car les deux grandeurs connues ne changent pas, étant donné qu'elles sont connues.

من هاتين النسبتين في كتابنا في شرح المصادرات وبينا هناك أن كل واحدة من هاتين النسبتين موجودة في المقادير. ونحن نبيّن كل واحدة من هاتين النسبتين في هذا الموضع بقول مختصر يُفهم منه معناهما. وهو أن النسبة العددية التي تكون بين مقدارين هي B-72r التي تكون / نسبة أحد مقداريها إلى الآخر كنسبة عدد إلى عدد؛ والنسبة الغير عددية س - ٣١٨ - هي التي ليس نسبة مقداريها كنسبة عدد إلى عدد؛ والتي نسبة أحد مقداريها إلى الآخر كنسبة عدد إلى عدد هي التي يكون أحد مقداريها جزءًا من الآخر أو أجزاءً من الآخر، أعني أنه يمكن أن نقسم كل واحد منهما بأقسام متساوية ويكون كل واحد من أقسام أحدهما مساويا لكل واحد من أقسام الآخر، أو يكون أحدهما بقدر الآخر. والنسبة الغير عددية هي التي لا يمكن فيها ذلك.

والنسبة المعلومة التي بين مقدارين تنقسم قسمين، أحد القسمين هو أن يكون نسبة أحد المقدارين إلى الآخر كنسبة عدد معلوم إلى عدد معلوم، والقسم الآخر أن يكون نسبة أحد المقدارين إلى الآخر كنسبة مقدار معلوم يمكن أن يوجد ويعين عليه إلى مقدار معلوم يمكن أن يوجد ويعين عليه. وقد يمكن أن يجمع القسمان تحت هذا القسم فيقال: إن النسبة المعلومة التي تكون بين مقدارين هي التي تكون نسبة أحد مقداريها إلى الآخر كنسبة مقدار معلوم يمكن أن يوجد ويُعين عليه إلى مقدار معلوم يمكن أن يوجد ويُعين عليه؛ لأن كل مقدارين نسبة أحدهما إلى الآخر كنسبة عدد معلوم إلى عدد معلوم، فقد يمكن أن يوجد مقداران على نسبتهما. فالنسبة المعلومة التي بين مقدارين هي التي يمكن أن يوجد مقداران معلومان على نسبة مقداريها. وإذا وجد مقداران معلومان على نسبة مقدارين، فالنسبة التي بين ذينك المقدارين ليس تتغير، لأن المقدارين المعلومين اللذين يوجدان ليس يتغيران لأنهما معلومان.

1-2 في كتابنا ... النسبتين: ناقصة [ب] – 2 من هاتين النسبتين: منها [س] – 3 هو: ناقصة [س] – 4 نسبة أحد مقداريها إلى الآخر: ناقصة [س] / الغير عددية: والأفصح «غير العددية» ولن نشير إلى هذا الاستعمال فيما بعد – 5 مقداريها (الثانية): المقاداريها [س] –6 جزءًا: جزء [س] – 7 نقسم: يقسم [س] – 8 أو: و[س] – 9 عددية: العددية [ب] / فيها: فيهما [س] – 10 والنسبة: فالنسبة [س] – 11-12 كنسبة ... الآخر: ناقصة [ب] – 14 مقداريها: مقداريهما [س] – 14-15 إلى ... عليه: ناقصة [ب] – 18 مقداران معلومان: مقدارين معلومين [س] – 19 تتغير: يتغير [س]

Le connu en position, c'est celui dont la position ne change pas. Quant à ce qu'est la position, c'est la situation[13], et la situation s'établit par rapport à une chose posée. La position est dans le corps, dans la surface, dans la ligne et dans le point. La position dans le corps se partage en deux sortes : ou bien elle B-72r peut être relative à une chose fixe, ou bien / elle peut être relative à une chose mobile. Ce qui est relatif à une chose fixe, c'est ce qui ne se déplace ni ne se meut par aucune sorte de mouvement ; le corps de position connue relatif à une chose fixe est celui dont la distance de chacun de ses points aux points fixes qui se trouvent dans la chose fixe est une même distance qui ne change pas ; cette partie est celle appelée de position connue absolument. Quant au corps de position connue relativement à une chose mobile, c'est celui dont la distance de chacun de ses points à tout point de cette chose mobile est une même distance, qui ne change pas. Il s'ensuit que ce corps, qui est de position connue, quand la chose à laquelle il est relatif se meut, se meut d'un mouvement égal à son mouvement, de sorte que les distances entre chacun de ses points et tout point de la chose à laquelle il est relatif soient les mêmes distances que celles qui étaient entre eux, comme une partie déterminée des parties du corps mobile, et comme l'organe déterminé des organes de l'homme. Les distances de chaque point de la partie déterminée des parties du corps à chaque point des parties du corps qui restent ne changent pas ; cependant si ce corps se meut, cette partie se meut par son mouvement et les distances de chaque point de cette partie à chaque point du reste de ce corps sont les mêmes distances et ne changent pas. Cette partie est dite de position connue par rapport à ceci ou à cela, et on ne peut se référer à ce connu en position, sans se référer à l'autre chose par rapport à laquelle il est de position connue, tout en se référant à lui. De même, les surfaces de position connue se partagent aussi en deux sortes et leur situation pour leur position est comme la situation des corps, sans aucune différence : ou bien leur position est relative à des surfaces, ou à des lignes, ou à des points fixes ; ou bien leur position est relative à des surfaces, ou à des lignes, ou à des points mobiles ; et ces surfaces

13. Nous traduisons ici le terme qui habituellement rend le grec θέσις.

فأما المعلوم الوضع فهو الذي لا يتغير وضعه. فأما ما هو الوضع فهو النصبة، والنصبة تتقوم بالقياس إلى شيء موضوع. والوضع يكون في الجسم ويكون في السطح ويكون في الخط ويكون في النقطة. فالوضع في الجسم ينقسم قسمين: إما أن يكون مضافاً إلى شيء ثابت وإما / أن يكون مضافاً إلى شيء متحرك؛ فالمضاف إلى شيء ثابت هو الذي ب - ٧٢ - و لا ينتقل ولا يتحرك بضرب من ضروب الحركات؛ فالجسم المعلوم الوضع المضاف إلى شيء ثابت هو الذي يكون بُعدُ كل نقطة منه من النقط الثابتة الموجودة في الشيء الثابت بُعداً واحداً لا يتغير؛ وهذا القسم هو الذي يُسمى معلوم الوضع على الإطلاق. فأما الجسم المعلوم الوضع المضاف إلى شيء متحرك فهو الذي يكون بُعدُ كل نقطة منه من كل نقطة من ذلك الشيء المتحرك بُعداً واحداً لا يتغير. فيلزم من ذلك أن يكون المعلوم الوضع الذي بهذه الصفة، متى تحرك الشيء الذي هو مضاف إليه، تحرك ذلك الجسم المعلوم الوضع حركةً مساويةً لحركته، ويكون أبعاد ما بين كل نقطة منه وبين كل نقطة من الشيء الذي يُضاف إليه هي الأبعاد بعينها التي كانت بينهما، كالجزء المعين من أجزاء الجسم المتحرك، وكالعضو المعين من أعضاء الإنسان؛ فإن [أبعاد] الجزء المعين من أجزاء الجسم ليس تتغير أبعاد كل نقطة منه من كل نقطة من بقية أجزاء ذلك الجسم، ومع ذلك فإن ذلك الجسم إذا تحرك تحرك ذلك الجزء بحركته، وأبعاد كل نقطة من ذلك الجزء من كل نقطة من بقية ذلك الجسم أبعاد واحدة بأعيانها لا تتغير. وهذا القسم يُقال له المعلوم الوضع بالقياس إلى كذا وكذا، ولا يمكن أن يُشار إليه إلا ويُشار إلى الشيء الآخر الذي هو معلوم الوضع عنده مع الإشارة إليه. وكذلك السطوح المعلومة الوضع تنقسم أيضاً قسمين وحالها في أوضاعها كحال الأجسام لا فرق بينهما: فإما أن يكون وضعها مُضافاً إلى سطوح أو خطوط أو نقط ثابتة، وإما أن يكون وضعها مضافاً

1 النصبة: النسبة [س] – 1-2 والنصبة تتقوم: ناقصة [س] – 2 ويكون (الأولى): فيكون [س] – 5 ينتقل: يتنقل [ب] وكلاهما صحيح – 6 من: في [ب، س] – 11 وبين: من [ب، س] – 12 كالجزء: فاجز [س]. – 14 أبعاد: لأبعاد [ب] – 16 تتغير: يتغير [ب] – 18 وكذلك: ولذلك [س] – 19 تنقسم: ينقسم [س] / فإما: اما [س] امكن [ب] – 20 نقط: نقطة [ب، س]

seront en mouvement par le mouvement des choses auxquelles la position est relative.

De même la position des lignes se partage en deux parties selon la même division que les surfaces; et de même pour les points, si on dit: le point de position connue absolument est celui dont la position est relative à un point ou à des points fixes, et est celui qui ne se déplace ni ne se meut. Si on dit que le point est de position connue par rapport à une chose mobile, ce sera celui dont la distance à tout point de cette chose mobile est la même distance, qui ne change pas. Et si la chose se meut, le point se meut par son mouvement, comme le centre du cercle, dont la distance à chaque point de la circonférence du cercle est la même distance, qui ne change pas; et cependant, si le cercle se meut, son centre se meut avec lui, comme pour le centre de la sphère, et comme pour le sommet du cône; et de cela les exemples sont nombreux. Le connu en position se partage donc en deux parties dans chacune des
S-319r grandeurs qui sont la ligne,/ la surface et le corps: il en est de même pour les points.

Quant au connu en forme, il n'existe que pour les figures; ainsi la figure de forme connue est celle dont les angles sont connus, et dont les rapports de ses côtés les uns aux autres sont connus. Les figures existent dans les surfaces et dans les corps; les figures planes peuvent comprendre des figures de forme connue, et les figures solides peuvent comprendre des figures de forme connue.

Ce que nous avons mentionné, ce sont toutes les parties des connus, elles sont toutes utilisées dans l'art de l'analyse; tous les connus, mentionnés par Euclide dans son livre appelé *Les Données*[14], sont compris dans l'ensemble des parties que nous avons mentionnées; et dans ce que nous avons mentionné, il y a quelque chose qu'Euclide n'a pas mentionné: ce sont les choses mobiles de position connue. Il reste encore dans ces parties une notion qu'aucun des anciens n'a mentionnée, et que nous n'avons trouvée dans aucun livre; c'est l'une des notions dont on a besoin dans l'art de l'analyse, et dont l'utilité pour résoudre les problèmes croît; nous mentionnons dans ce lieu certaines de ses

14. C'est ainsi qu'il l'appelle ici, contrairement à précédemment.

إلى سطوح أو خطوط أو نقط متحركة، فيكون هذه السطوح متحركة بحركة الأشياء التي الوضع مضاف إليها.

وكذلك الخطوط ينقسم وضعها إلى قسمين على مثل قسمة السطوح، وكذلك النقط إذا قيل : إن النقطة معلومة الوضع على الإطلاق فهي التي وضعها مضاف إلى نقطة أو نقط ثابتة وهي التي لا تنتقل ولا تتحرك. وإذا قيل : إن النقطة معلومة الوضع بالقياس إلى شيء متحرك فهي التي يكون بُعدها من كل نقطة من ذلك الشيء المتحرك بُعداً واحداً لا يتغير، وإذا تحرك ذلك الشيء تحركت النقطة بحركته، كمركز الدائرة فإن بُعده من كل نقطة من محيط الدائرة بُعدٌ واحدٌ لا يتغير، ومع ذلك فإن الدائرة إذا تحركت تحرك مركزها معها، وكمركز الكرة، وكرأس المخروط، وأمثال ذلك كثير. فالمعلوم الوضع ينقسم قسمين في كل واحد من المقادير التي هي الخط / والسطح والجسم، وهو أيضاً في النقط. س – ٣١٩ – و

وأما المعلوم الصورة، فليس يكون إلا في الأشكال فقط؛ فالشكل المعلوم الصورة هو الذي يكون زواياه معلومة ونسب أضلاعه بعضها إلى بعض معلومة. والأشكال تكون في السطوح وفي الأجسام؛ والأشكال المسطحة قد يكون فيها أشكال معلومة الصورة، والأشكال المجسمة قد يكون فيها أشكال معلومة الصورة.

فهذا الذي ذكرناه هو جميع أقسام المعلومات، وجميعها يُستعمل في صناعة التحليل؛ وجميع المعلومات التي ذكرها أقليدس في كتابه المسمى المعطيات هي داخلة في جملة هذه الأقسام التي ذكرناها؛ وفيما ذكرناه شيء لم يذكره أقليدس : وهي الأشياء المعلومة الوضع المتحركة. وقد بقي من بعد هذه الأقسام معنى آخر لم يذكره أحد من المتقدمين ولا وجدناه في شيء من الكتب، وهو من المعاني التي يُحتاج إليها في صناعة التحليل ويعظم الانتفاع بها في استخراج المسائل؛ ونحن نذكر في هذا الموضع بعض

10 كل : ناقصة [س]. – 13 ونسب : وليست [ب] – 14 في : ناقصة [س] / والأشكال : فالأشكال [س] – 17 المعطيات : المعلومات [ب] – 18 ذكرناها : كرر بعدها «وفيما ذكرناها» [س]

parties pour les utiliser dans les exemples de l'analyse et pour montrer comment utiliser ces connus, et comment le besoin se fait sentir de cette notion; et nous allons exhiber où elle satisfait dans l'art de l'analyse, et l'insuffisance des connus qui sont dans les livres à couvrir les parties des notions connues; nous couvrirons ensuite toutes les parties des connus, et nous tiendrons sur eux un propos exhaustif dans ce traité dont nous allons poursuivre la composition.

⟨PREMIER CHAPITRE⟩

– 1 — L'une ⟨des notions⟩ que nous allons exposer ici même est que pour tout couple de points de position connue, desquels on mène deux droites qui se rencontrent en un seul point et sont telles que le rapport de l'une des droites à l'autre soit un rapport connu, alors ce point est sur la circonférence d'un cercle de position connue.

Exemple: Soient deux points A et B de position connue, desquels on mène les deux droites AC et BC telles que le rapport de AC à CB soit égal à un rapport connu qui est le rapport de G à E, rapport du plus grand au plus petit.

Nous disons que le point C est sur la circonférence d'un cercle de position connue.

Démonstration: Joignons AB et prolongeons-la dans la direction de B jusqu'à D. Construisons sur la droite AC au point C un angle égal à l'angle CBD, que sa droite engendrée soit menée dans la direction de B et que l'angle soit ACM. La droite CM sera alors à l'extérieur du triangle ACB, car l'angle ACM est égal à l'angle CBD qui est plus grand que l'angle ACB.

أقسامه لنستعمله في أمثلة التحليل، ولنبين كيف يكون استعمال هذه المعلومات، وكيف تعرض الحاجة إليه، ونظهر موضع غنائه في صناعة التحليل وقصور ما هو موجود في الكتب من المعلومات عن استيفاء أقسام المعاني المعلومة؛ ثم نستوفي جميع أقسام المعلومات ونستقصي القول فيها في المقالة التي نستأنف تأليفها.

‹الفصل الأول›

– آ – وأحد ما نذكره هاهنا هو: أن كل نقطتين معلومتي الوضع يخرج منهما خطان يلتقيان على نقطة واحدة ويكون نسبة أحد الخطين إلى الآخر نسبة معلومة، فإن تلك النقطة هي على محيط دائرة معلومة الوضع.

ومثال ذلك: نقطتا ا ب معلومتا الوضع، وخرج منهما خطا ا ج ب ج وكانت نسبة ا ج إلى ج ب مثل نسبة معلومة وهي نسبة ز إلى ه وهي نسبة أعظم إلى أصغر. فنقول: إن نقطة ج على محيط دائرة معلومة الوضع.

برهان ذلك: أنا نصل ا ب ونخرجه على استقامة في جهة ب إلى د، ونعمل على خط ا ج على نقطة ج منه زاوية مساوية لزاوية ج ب د، وليكن خطها الحادث خارجاً في جهة ب، ولتكن زاوية ا ج م؛ فيكون خط ج م خارجاً عن مثلث ا ج ب لأن زاوية ا ج م مساوية لزاوية ج ب د التي هي أعظم من زاوية ا ج ب.

1 لنستعمله: نستعمله [س] ليستعمله [ب] / ولنبين: وسنبين به [س] / استعمال: غير واضحة [س] – 2 غنائه: عناية [س] / وقصور: وتصور [ب] – 6 آ: ناقصة [س] – 7 نسبة أحد الخطين: مكررة [س] – 9 وخرج: خرج [ب] – 10 ز: د [ب] – 11 فنقول: اقول [س] – 14 ولتكن: وليكن [س]، وهي جائزة، ولن نشير إلى مثلها فيما بعد

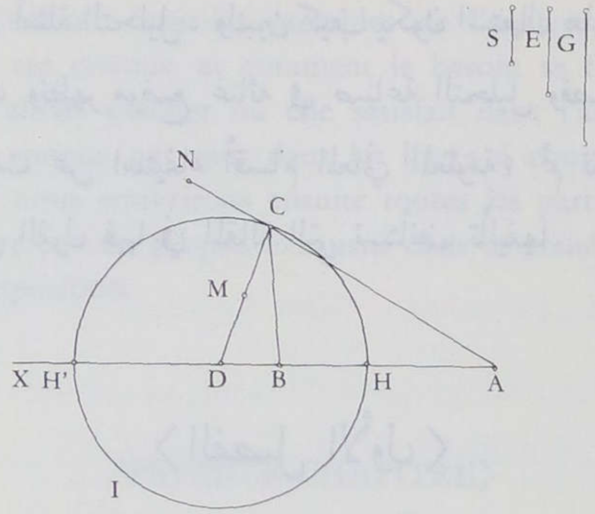
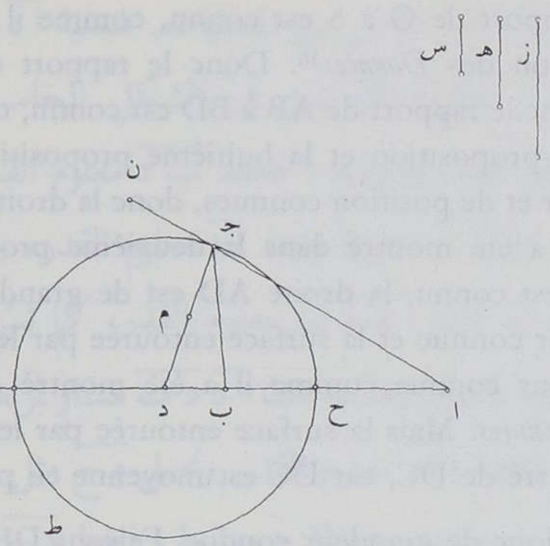


Fig. 1

Je dis d'abord que la droite CM rencontre la droite BD.

Prolongeons la droite AC au ⟨point⟩ N. L'angle NCM est alors égal à l'angle CBA et l'angle CBA est plus grand que l'angle CAB, car AC est plus
B-72v grande que CB et ceci car le rapport de AC / à CB est le rapport du plus grand au plus petit, donc l'angle NCM est plus grand que l'angle CAB, donc la somme des deux angles MCA et CAB est plus petite que deux droits, donc les deux droites CM et AB forment[15] dans la direction de B moins que deux droits, donc les droites CM et AB se rencontrent dans la direction de B, qu'elles se rencontrent au point D. Les deux triangles ACD et BCD sont donc semblables car l'angle ACD est égal à l'angle CBD et l'angle ADC est commun aux deux triangles, il reste donc l'angle BCD égal à l'angle CAD. Le rapport de AD à DC est donc égal au rapport de CD à DB et est égal au rapport de AC à CB. Mais le rapport de AC à CB est égal au rapport de G à E qui est connu, donc le rapport de AD à DC est égal au rapport de G à E. Posons le rapport de E à S égal au rapport de G à E, donc le rapport de E à S est égal au rapport de CD à DB. Le rapport de AD à DB est donc égal au rapport de G à S. Et le rapport de G à E est connu, donc le rapport de E à S

15. Littéralement: se rencontrent sur.



فأقول أولاً : إن خط ج م يلقى خط ب د

ونخرج خط ا ج على استقامة إلى ن ، فتكون زاوية ن ج م مساوية لزاوية ج ب ا ، وزاوية ج ب ا أعظم من زاوية ج ا ب لأن ا ج أعظم من ج ب ، وذلك أن نسبة ا ج / إلى ج ب نسبة أعظم إلى أصغر، فزاوية ن ج م أعظم من زاوية ب - ٧٢ - ظ ج ا ب ، فزاويتا م ج ا ج ا ب أقل من قائمتين، فخطا ج م ا ب يلتقيان في جهة ب 〈على〉 أقل من قائمتين، فخطا ج م ا ب يلتقيان في جهة ب ، فليلتقيا على نقطة د. فيكون مثلثا ا ج د ب ج د متشابهين وذلك أن زاوية ا ج د مساوية لزاوية ج ب د وزاوية د ج مشتركة للمثلثين، فيبقى زاوية ب ج د مساوية لزاوية ج ا د. فنسبة ا د إلى د ج كنسبة ج د إلى د ب وكنسبة ا ج إلى ج ب . ونسبة ا ج إلى ج ب كنسبة ز إلى ه المعلومة، فنسبة ا د إلى د ج كنسبة ز إلى ه . ونجعل نسبة ه إلى س كنسبة ز إلى ه ، فيكون نسبة ه إلى س كنسبة ج د إلى د ب . فيكون نسبة ا د إلى د ب كنسبة ز إلى س ، ونسبة ز إلى ه معلومة، فنسبة ه إلى س معلومة، ونسبة ز إلى س

2 خط : ناقصة [س] / إلى : ناقصة [س] – 5 قائمتين : خطين قائمتين [س] – 6 أقل ... ب : ناقصة [س] / فيلتقيا : يلتقيا [س] / د: ر [س] – 7 ا ج د : ا ج ر [س] – 8 فيبقى زاوية : فزاوية [ب] – 10 ز (الأولى والثانية) : د [ب] – 12 ز (الأولى والثانية) : د [ب] / معلومة (الأولى) : المعلومة [ب] / ز : د [ب]

est connu et le rapport de G à S est connu, comme il a été montré dans la huitième proposition des *Données*[16]. Donc le rapport de AD à DB est un rapport connu, donc le rapport de AB à BD est connu, comme il a été montré dans la cinquième proposition et la huitième proposition des *Données*. Mais AB est de grandeur et de position connues, donc la droite BD est de grandeur connue comme il a été montré dans la deuxième proposition des *Données*. Donc le point D est connu, la droite AD est de grandeur connue, la droite DB est de grandeur connue et la surface entourée par les deux droites AD et DB est de grandeur connue comme il a été montré dans la cinquantième proposition des *Données*. Mais la surface entourée par les deux droites AD et DB est égale au carré de DC, car DC est moyenne en proportion entre elles.

La droite DC est donc de grandeur connue. Faisons DH égale à DC, alors la droite DH est de grandeur connue et son point D est connu, donc le point H est connu, donc la droite DH est de position connue. Posons D comme centre et traçons avec la distance DH un cercle, il passe alors par le point C car DC est égale à DH, soit le cercle HCI; le cercle HCI est donc de position connue, car son centre est de position connue, son rayon est de grandeur connue et il passe par le point C; le point C est donc sur la circonférence d'un cercle de
S-319v position connue qui est le cercle / HCI. Ce qu'il fallait démontrer.

— **2** — Nous disons également: s'il existe un cercle de grandeur et de position connues et un point de position connue, si on mène du point une droite jusqu'à la circonférence du cercle et qu'on la prolonge jusqu'à ce que le rapport de la première droite à la seconde droite soit un rapport connu, alors le point qui est l'extrémité de la deuxième droite est sur la circonférence d'un cercle de grandeur et de position connues.

Exemple: Le cercle AB est de grandeur et de position connues et le point C est connu. On mène du point C la droite CA que l'on prolonge jusqu'à D, de sorte que le rapport de CA à AD soit connu.

16. Pour les numéros des propositions des *Données*, nous nous contentons ici de reproduire les numéros donnés par les manuscrits.

معلومة، كما تبيّن في الشكل الثامن من المعطيات. فنسبة آ د إلى د ب نسبة معلومة، فنسبة آ ب إلى ب د معلومة كما تبيّن في الشكل الخامس والشكل الثامن من المعطيات. وا ب معلوم القدر والوضع، فخط ب د معلوم القدر، كما تبيّن في الشكل الثاني من المعطيات. فنقطة د معلومة وخط ا د معلوم القدر، وخط د ب معلوم القدر، والسطح الذي يحيط به خطا ا د د ب معلوم القدر، كما تبيّن في الشكل الخمسين من المعطيات. والسطح الذي يحيط به خطا ا د د ب مساوٍ لمربع د جـ لأن د جـ متوسط في النسبة فيما بينهما. فخط د جـ معلوم القدر. ونجعل د ح مثل د جـ، فيكون خط د ح معلوم القدر ونقطة د منه معلومة، فنقطة ح معلومة، فخط د ح معلوم الوضع. فنجعل د مركزاً وندير ببُعد د ح دائرة فهي تمرّ بنقطة جـ لأن د جـ مثل د ح، وليكن دائرة ح جـ ط؛ فدائرة ح جـ ط معلومة الوضع لأن مركزها معلوم الوضع ونصف قطرها معلوم القدر وهي تمرّ بنقطة جـ، فنقطة جـ على محيط دائرة معلومة الوضع وهي دائرة / س - ٣١٩ - ظ
ح جـ ط؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

– ب – وأيضاً، فإنا نقول: إنه إذا كانت دائرة معلومة القدر والوضع ونقطةٌ معلومة الوضع، وخرج من النقطة خط إلى محيط الدائرة وأنفذ على استقامة حتى صارت نسبة الخط الأول إلى الخط الثاني نسبة معلومة، فإن النقطة التي هي نهاية الخط الثاني هي على محيط دائرة معلومة 〈القدر و〉الوضع.

مثال ذلك: دائرة ا ب معلومة القدر والوضع ونقطة جـ معلومة، وخرج من نقطة جـ خط جـ ا ونفذ على استقامة إلى د، وكانت نسبة جـ ا إلى ا د معلومة.

2 في: من [س] / الخامس: هـ [ب] / الثامن: ح [ب] – 5 والسطح: فالسطح [س] – 8 ونقطة: فنقطة [ب] – 9 دائرة: ودائرة [س] / دائرة: أثبتها فوق السطر [ب] – 13 ب: ناقصة [س] – 14 خط: خطا [ب] – 15 هي نهاية: بها صار هي نهاية [ب] وأثبت «بها» فوق السطر – 17 نقطة: نقط [س] – 18 وكانت: فكانت [س]

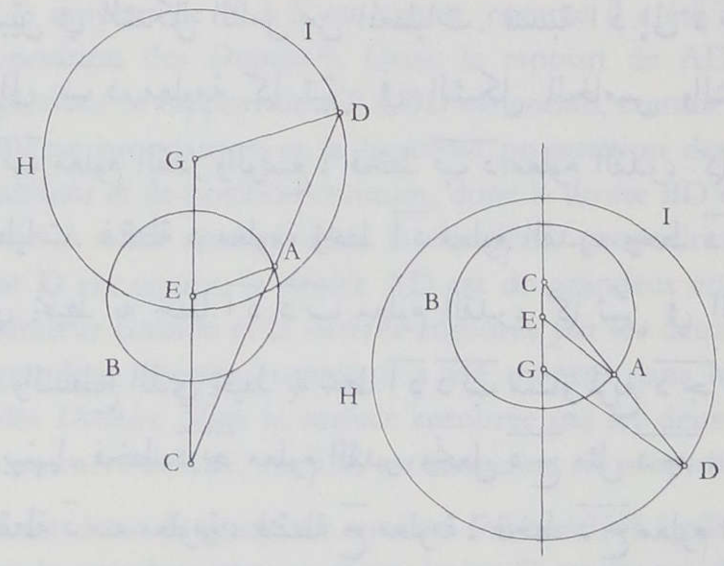
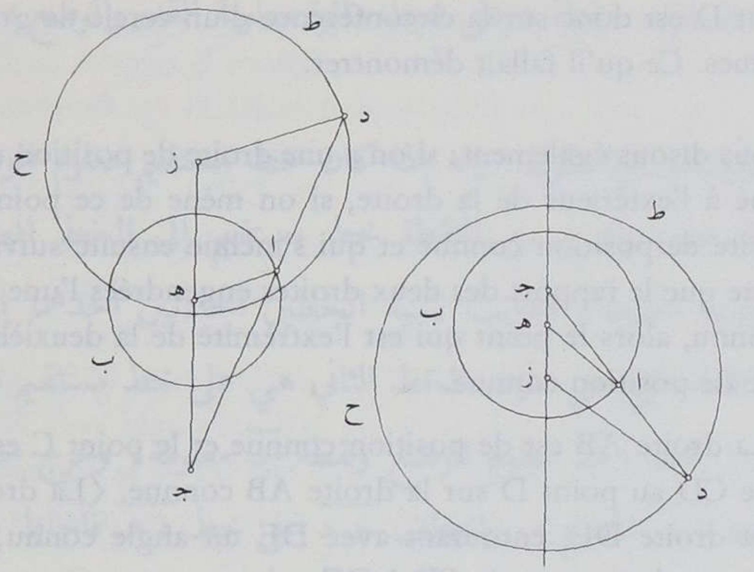


Fig. 2

Je dis que le point D est sur la circonférence d'un cercle de grandeur et de position connues.

Démonstration: Déterminons le centre du cercle, soit E; joignons CE, prolongeons-la dans la direction de E, joignons EA et imaginons DG parallèle à la droite AE. Donc le rapport de GD à EA est égal au rapport de DC à CA et est égal au rapport de GC à CE. Mais le rapport de DC à CA est connu, car le rapport de DA à AC est connu, comme il a été montré dans la sixième proposition des *Données*. Le rapport de GD à EA est donc connu, le rapport de GC à CE est connu, EA est de grandeur connue et EC est de grandeur connue. La droite GD est donc de grandeur connue, mais la droite GC est de grandeur connue comme il a été montré dans la deuxième proposition des *Données*. Mais puisque les deux points C et E sont de position connue, alors la droite CE est de position connue comme il a été montré dans la vingt-cinquième proposition des *Données*. La droite CG est donc de grandeur et de position connues et son point C est connu, donc son point G est connu comme il a été montré dans la vingt-sixième proposition des *Données*. Posons le point G comme centre et traçons avec la distance GD de grandeur connue, un cercle, soit le cercle DHI; alors le cercle DHI est de grandeur et position connues, car son centre est de position connue et son rayon est de grandeur connue. Or le point D est sur la circonférence de ce



فأقول : إن نقطة د على محيط دائرة معلومة 〈القدر و〉الوضع .

برهانه : أنا نجد مركز الدائرة وليكن ه، ونصل ج ه، ونخرجه على استقامة في جهة ه، ونصل ه ا، ونتوهم د ز موازياً لخط ا ه. فيكون نسبة ز د إلى ه ا كنسبة د ج إلى ج ا، وكنسبة ز ج إلى ج ه. ونسبة د ج إلى ج ا معلومة لأن نسبة د ا إلى ا ج معلومة، كما تبيّن في الشكل السادس من المعطيات. فنسبة ز د إلى ه ا معلومة ونسبة ز ج إلى ج ه معلومة وه ا معلوم القدر وه ج معلوم القدر. فخط ز د معلوم القدر، وخط ز ج معلوم القدر، كما تبيّن في الشكل الثاني من المعطيات. ولأن نقطتي ج ه معلومتا الوضع يكون خط ج ه معلوم الوضع، كما تبيّن في الشكل الخامس والعشرين من المعطيات. فخط ج ز معلوم القدر والوضع ونقطة ج منه معلومة، فنقطة ز منه معلومة، كما تبيّن في الشكل السادس والعشرين من المعطيات. ونجعل نقطة ز مركزاً وندير ببُعد ز د المعلوم القدر دائرة ولتكن دائرة د ح ط، فتكون دائرة د ح ط معلومة القدر والوضع لأن مركزها معلوم الوضع ونصف قطرها معلومُ القدر. ونقطة د هي

1 فأقول : اقول [س] – 2 برهانه : برهان [س] / نجد : نحد [ب، س] – 4 جـ ا (الثانية) : د ا [س] – 6 معلوم (الأولى) : معلومة [س] – 8 معلومتا : معلومتي [ب] / جـ ه : ه جـ [س] – 8-9 الخامس والعشرين : كه [س] وغالبًا ما يستعمل أعداد الجمّل، ولن نشير إليها فيما بعد – 10 ز (الأولى) : ا [س] – 11 ببعد : أثبتها في الهامش [ب]

cercle, le point D est donc sur la circonférence d'un cercle de grandeur et de position connues. Ce qu'il fallait démontrer.

— 3 — Nous disons également: si on a une droite de position connue et un point C donné à l'extérieur de la droite, si on mène de ce point une droite jusqu'à la droite de position connue et qui s'incline ensuite suivant un angle connu, de sorte que le rapport des deux droites engendrées l'une à l'autre soit un rapport connu, alors le point qui est l'extrémité de la deuxième droite est sur une droite de position connue.

Exemple: La droite AB est de position connue et le point C est connu; on mène la droite CD au point D sur la droite AB connue. ⟨La droite⟩ CD est inclinée sur la droite DE, entourant avec DE un angle connu, soit l'angle CDE, de sorte que le rapport de CD à DE soit un rapport connu.

Je dis que le point E est sur une droite de position connue.

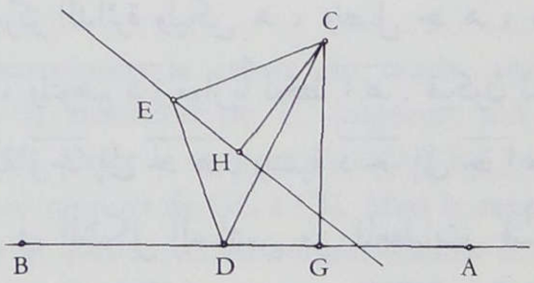


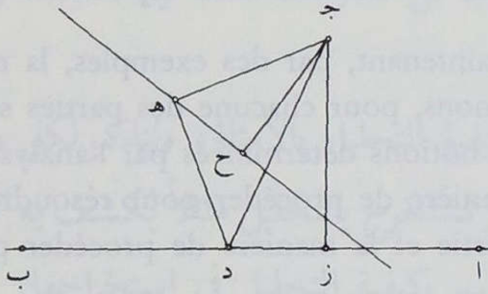
Fig. 3

Démonstration : Joignons CE, donc le triangle CDE est de forme connue
B-73r comme il a été montré dans la trente-neuvième proposition des *Données*,| l'angle DCE est donc connu et l'angle CED est connu. Menons du point C une perpendiculaire à la droite AB, soit CG; CG est donc de position connue comme il a été montré dans la vingt-neuvième proposition des *Données*. La droite AB est de position connue et coupe la droite CG. Le point G est donc connu comme il a été montré dans la proposition 24 des *Données*. La droite CG est d'extrémités connues, elle est donc de grandeur et de position connues. Construisons sur la droite CG l'angle GCH égal à l'angle DCE

على محيط هذه الدائرة، فنقطة دَ على محيط دائرة معلومة القدر والوضع؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

– جَ – وأيضاً، فإنا نقول: إنه إذا كان خط مستقيم معلوم الوضع ونقطة جَ مفروضة خارجة عنه، وخرج من النقطة خط مستقيم إلى الخط المعلوم الوضع ثم انعطف على زاوية معلومة، فكانت نسبة الخطين الحادثين أحدهما إلى الآخر نسبة معلومة، فإن النقطة التي هي طرف الخط الثاني هي على خط مستقيم معلوم الوضع.

مثال ذلك: خط اب معلوم الوضع ونقطة ج معلومة، وخرج خط ج د ⟨إلى نقطة دَ على خط اَبَ المعلوم⟩، وانعطف جَ دَ على خط دَ هَ فأحاط مع د ه بزاوية معلومة وهي زاوية ج د ه وكانت نسبة ج د إلى د ه نسبة معلومة.



فأقول: إن نقطة هَ على خط مستقيم معلوم الوضع.

برهان ذلك: أنا نصل ج ه، فيكون مثلث ج د ه معلوم الصورة، كما تبيّن في الشكل التاسع والثلاثين من المعطيات، / فتكون زاوية د ج ه معلومة وزاوية ج ه د ب – ٧٣ – و معلومة. ونخرج من نقطة جَ عموداً على خط اَبَ، وليكن جَ زَ، فيكون جَ زَ معلوم الوضع، كما تبيّن في الشكل التاسع والعشرين من المعطيات. وخط اَبَ معلوم الوضع ومقاطعٌ لخط ج ز. فنقطة زَ معلومة، كما تبيّن في الشكل كد من المعطيات. فخط ج ز معلوم النهايتين، فهو معلوم القدر والوضع. ونعمل على خط ج ز زاوية ز ج ح

3-4 ونقطة جَ ... الوضع: ناقصة [ب] – 5 فكانت: وكانت [ب] – 15 فنقطة: نقطة [س] / فخط: المخطوطة متآكلة في هذا الموضع [س] – 16 ج ز (الثانية): ز جَ [س]

connu, donc la droite CH est de position connue comme il a été montré dans la vingt-huitième proposition des *Données*. Posons le rapport de GC à CH égal au rapport de DC à CE qui est connu. Donc CH est de grandeur connue comme il a été montré dans la première proposition des *Données*. Joignons EH. Puisque l'angle GCH est égal à l'angle DCE, l'angle GCD est égal à l'angle HCE. Mais puisque le rapport de GC à CH est égal au rapport de DC à CE, le rapport de GC à CD est égal au rapport de HC à CE. Donc le triangle HCE est semblable au triangle GCD, donc l'angle CHE est égal à l'angle CGD. Mais l'angle CGD est droit, donc l'angle CHE est droit. On a
S-320r donc mené du point / H connu la droite HE entourant avec HC, qui est de position connue, un angle connu. La droite HE est de position connue, donc le point E est sur une droite de position connue. Ce qu'il fallait démontrer.

Ces notions des *Connus* que nous avons exposées sont convaincantes dans ce que nous utilisons et montrons dans ce traité sur la manière de procéder par l'analyse.

— 4 — Montrons maintenant, par des exemples, la manière de procéder par l'analyse et mentionnons, pour chacune des parties selon lesquelles nous avons partagé toutes les notions déterminées par l'analyse, un exemple grâce auquel on dévoile la manière de procéder pour résoudre les problèmes qui appartiennent à cette partie et la manière de procéder par analyse pour les déterminer.

Nous disons que l'exemple dans la partie théorique des problèmes numériques est à l'exemple de notre énoncé: si on a des nombres successifs proportionnels et qu'on sépare de chacun du second et du dernier, l'égal du premier, alors le rapport de ce qui reste du second au premier est égal au rapport de ce qui reste du dernier à la somme de tous les nombres qui le précèdent.

La manière de procéder par l'analyse pour résoudre ce problème est de supposer l'énoncé parfaitement achevé et d'examiner les propriétés des nombres sur lesquels porte cet énoncé, puis ⟨d'examiner⟩ ce qui est nécessaire à ces propriétés et ce qui est nécessaire à ce qui est nécessaire jusqu'à ce que l'on aboutisse à une propriété donnée, comme nous l'avons défini précédemment.

مساوية لزاوية د جـ هـ المعلومة ، فيكون خط جـ ح معلوم الوضع ، كما تبين في الشكل الثامن والعشرين من المعطيات. ونجعل نسبة ز جـ إلى جـ ح كنسبة د جـ إلى جـ هـ المعلومة. فيكون جـ ح معلوم القدر، كما تبيّن في الشكل الأول من المعطيات. ونصل هـ ح. فلأن زاوية ز جـ ح مثل زاوية د جـ هـ تكون زاوية ز جـ د مثل زاوية ح جـ هـ ؛ ولأن نسبة ز جـ إلى جـ ح كنسبة د جـ إلى جـ هـ ، يكون نسبة ز جـ إلى جـ د كنسبة ح جـ إلى جـ هـ . فمثلث ح جـ هـ شبيه بمثلث ز جـ د ، فزاوية جـ ح هـ مثل زاوية جـ ز د. وزاوية جـ ز د قائمة ، فزاوية جـ ح هـ قائمة. فقد خرج من نقطة / ح المعلومة س - ٣٢٠ - و
خط ح هـ فأحاط مع ح جـ المعلوم الوضع بزاوية معلومة. فخط ح هـ معلوم الوضع ، فنقطة هـ على خط مستقيم معلوم الوضع ؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

وهذه المعاني التي ذكرناها من المعلومات مقنعة فيما نستعمله ونبيّنه في هذه المقالة من كيفية التحليل.

– د – فلنبيّن الآن كيفية التحليل بالأمثلة ، ولنذكر لكل واحد من الأقسام التي قسمنا بها جميع المعاني التي تستخرج بالتحليل مثالاً يُكشف به كيفية استخراج المسائل التي تدخل تحت ذلك القسم وكيفية التحليل في استخراجها.

فنقول : إن المثال في القسم العلمي من المسائل العددية مثل قولنا : إذا كانت أعداد متوالية متناسبة وفصل من كل واحد من الثاني والأخير مثل الأول ، فإن نسبة الباقي من الثاني إلى الأول هي كنسبة الباقي من الأخير إلى جميع الأعداد التي قبله. وكيفية التحليل في استخراج هذه المسألة هي أن نفرض الدعوى على غاية التمام ، وننظر في خواص الأعداد المدعى فيها هذه الدعوى ثم فيما يلزم تلك الخواص ، وفيما يلزم ما يلزم منها إلى أن ننتهي إلى خاصة معطاة كما حددنا فيما تقدم.

1 المعلومة : المعلوم [ب] / الوضع : ناقصة [ب] / كما : بعدها كلمة غير واضحة [س] – 3 الشكل : ناقصة [ب] – 4 ز جـ ح : جـ ح [س] – 5 ز جـ : ز ح [ب] / جـ ح : جـ د [ب] / د جـ : ح جـ [ب] / ز جـ : ز ح [ب] – 8 ح هـ : جـ هـ [ب] / ح هـ : جـ هـ [ب] – 10 نستعمله : يستعمله [ب] – 12 د : ناقصة [س] – 15 العددية : ناقصة [ب] – 16 والأخير: والآخر [س] والا [ب] – 17 الأخير: الاخر [س] – 18 هي : هو [ب، س]

Soient les nombres successifs proportionnels, les nombres A, BC, DE, GH. On sépare de BC — le second — ⟨un nombre⟩ CM égal à A et on sépare de GH — le dernier — ⟨un nombre⟩ LH égal à A.

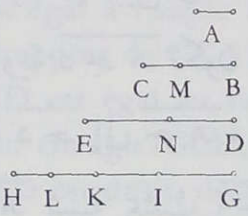
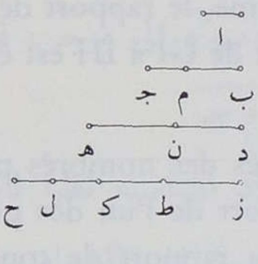


Fig. 4

Je dis que le rapport de BM à A est égal au rapport de GL à la somme de DE, BC et A.

Supposons qu'il en soit ainsi et qu'on examine les propriétés de ces nombres qui sont l'objet de la notion énoncée qu'il faut chercher pour distinguer sa validité de sa non-validité. Si on examine les propriétés de cette proposition, ce qui apparaît d'elles en premier est que le second est plus grand que le premier, car on ne peut séparer du second ce qui est égal au premier que si le second est plus grand que le premier. Et si le second est plus grand que le premier, alors chacun des nombres qui restent est plus grand que son prédécesseur. Mais puisque ces nombres sont proportionnels, il nous faut rechercher les propriétés des nombres proportionnels. Mais puisqu'on a retranché de certains de ces nombres ⟨certaines quantités⟩, il faut rechercher les propriétés des nombres proportionnels, desquels on a retranché ⟨certaines quantités⟩. Il a été montré dans la douzième proposition du septième livre de l'ouvrage d'Euclide que si de deux nombres on retranche deux nombres tels que le rapport du tout au tout soit égal au rapport du retranché au retranché, alors le rapport du reste au reste est égal au rapport du tout au tout. Il s'ensuit que si on retranche de chacun de ces nombres le nombre qui le précède, alors le rapport des restes les uns aux autres est égal au rapport des nombres retranchés les uns aux autres. Si on permute le rapport, alors le rapport du reste de l'un des nombres à ce qui lui a été retranché est égal au rapport du reste de chacun de ces nombres à ce qui lui a été retranché. Cet examen est l'intuition de l'art qui a nécessité un supplément au sujet; ce supplément est:

فليكن الأعداد المتوالية المتناسبة أعداد آ ب جـ د هـ ز ح، وقد فُصل من ب جـ الثاني جـ م مثل آ وفصل من ز ح الأخير ل ح مثل آ.



فأقول: إن نسبة ب م إلى آ هي كنسبة ز ل إلى جميع د هـ ب جـ آ.

فنفرض أن ذلك كذلك، ويُنظر في خواص هذه الأعداد التي هي موضوع المعنى المدعى الذي يجب أن يُبحث عنه لتعرف صحته من سقمه. وإذا نُظر في خواص هذا الشكل، فاول ما يظهر منها هو أن الثاني أعظم من الأول، لأنه ليس يمكن أن يُفصل من الثاني مثل الأول إلاّ بعد أن يكون الثاني أعظم من الأول. وإذا كان الثاني أعظم من الأول، فإن كل واحد من الأعداد الباقية أعظم من الذي قبله. ولأن هذه الأعداد متناسبة فيجب أن نبحث عن خواص الأعداد المتناسبة. ولأن هذه الأعداد قد نقص من بعضها نقصان، فيجب أن يبحث عن خواص الأعداد المتناسبة التي قد نقص منها نقائص. وقد تبيّن في الشكل الثاني عشر من المقالة السابعة من كتاب أقليدس أن كل عددين يُنقص منهما عددان فيكون نسبة الكل إلى الكل كنسبة المنقوص إلى المنقوص، فإن نسبة الباقي إلى الباقي هي نسبة الكل إلى الكل. فيلزم من ذلك أن تكون هذه الأعداد إذا نُقص من كل واحد منها العدد الذي قبله، كانت نسبة البقايا بعضها إلى بعض كنسبة الأعداد المنقوصة بعضها إلى بعض. فإذا بدلت النسبة، كانت نسبة بقية أحد الأعداد إلى ما نقص منه كنسبة بقية كل واحد من الأعداد إلى ما ينقص منه. وهذا النظر هو الحدس الصناعي الذي أوجب زيادة في الموضوع، والزيادة هي نقصان

2 جـ م: ناقصة [ب] / فصل: ناقصة [ب] – 4 وينظر: فنظر [ب] – 5 لتعرف: ليعرف [ب] – 11 أقليدس: غالبًا ما كتبها «أوقليدس»، ولن نشير إليها فيما بعد [ب] – 12 فيكون: ويكون [س] – 14 منها: منها [س] – 15 فإذا: وإذا [س]

la soustraction de chaque nombre du nombre qui lui succède. Nous séparons donc du nombre DE, le troisième, NE égal à BC et de GH, le quatrième, IH égal à DE; le rapport de GI à DN est donc égal au rapport de GH à DE, qui est égal au rapport de IH à EN, donc le rapport de GI à IH est égal au rapport de DN à NE. De même, le rapport de DN à NE est égal au rapport de BM à MC, donc le rapport de GI à IH est égal au rapport de DN à NE et au rapport de BM à MC.

Si on examine les propriétés des nombres proportionnels d'une deuxième façon, alors il existe un rapport de l'un des prédécesseurs à son homologue parmi les successeurs égal au rapport de tous les prédécesseurs à tous les successeurs, car cela a été montré dans la proposition 13 du septième livre de l'ouvrage d'Euclide. Le rapport de la somme de GI, DN et BM à la somme de IH, NE et MC est donc égal au rapport de BM à MC, et MC est égal à A. Donc le rapport de la somme de GI, DN et BM à la somme de IH, NE et MC B-73^v est égal au rapport de BM à A. Mais IH, NE et MC sont les nombres / DE, BC et A, donc le rapport de la somme de GI, DN et BM à la somme de DE, BC et A est égal au rapport de BM à A. Mais l'énoncé était que le rapport de S-320^v BM à A est égal au rapport de GL à la somme de DE, BC et A./ La somme des restes qui sont GI, DN et BM est donc égale au nombre GL.

Examinons maintenant: si ces restes — qui sont GI, DN et BM — ont une somme égale au reste qui est GL, dans ce cas l'énoncé est vrai et il est une notion valable; si la somme de ces restes n'était pas égale au reste qui est GL, alors l'énoncé serait faux et n'aurait aucune validité. Mais nous avons séparé IH égal à DE et DE est plus grand que BC, donc IH est plus grand que BC. Séparons donc de IH ce qui est égal à BC, soit KH. Mais BC est plus grand que A, donc KH est plus grand que A et LH est égal à A, donc KH est plus grand que LH. Mais puisque LH est égal à A et MC est égal à A, LH est égal

كل عدد من العدد الذي يليه. فنفصل من عدد د هـ الثالث ن هـ مثل ب جـ ومن ز ح الرابع ط ح مثل د هـ، فيكون نسبة ز ط إلى د ن كنسبة ز ح إلى د هـ، ⟨التي هي كنسبة ط ح إلى هـ ن⟩، ويكون نسبة ز ط إلى ط ح كنسبة د ن إلى ن هـ. وكذلك تكون نسبة د ن إلى ن هـ كنسبة ب م إلى م جـ، فيكون نسبة ز ط إلى ط ح كنسبة د ن إلى ن هـ وكنسبة ب م إلى م جـ.

وإذا نظر في خواص الأعداد المتناسبة نظراً ثانياً، فإنه يوجد نسبة الواحد من المقدمات إلى نظيره من التوالي كنسبة كل المقدمات إلى كل التوالي، لأن ذلك قد تبيّن في الشكل يـجـ من المقالة السابعة من كتاب أقليدس. فيكون نسبة ز ط د ن ب م مجموعةً إلى ط ح ن هـ م جـ مجموعة كنسبة ب م إلى م جـ وم جـ مثل ا. فنسبة مجموع ز ط د ن ب م إلى مجموع ط ح ن هـ م جـ هي نسبة ب م إلى ا. وط ح ن هـ م جـ هي أعداد / ب - ٧٣ - ظ د هـ ب جـ آ، فنسبة ز ط د ن ب م إلى مجموع د هـ ب جـ ا هي نسبة ب م إلى آ. وقد كانت الدعوى أن نسبة ب م إلى آ هي نسبة ز ل إلى مجموع د هـ ب جـ ⟨آ⟩. / س - ٣٢٠ - و فمجموع البقايا التي هي ز ط د ن ب م مساوية لعدد ز ل.

فلننظر الآن إن كانت البقايا التي هي ز ط د ن ب م مساوية للبقية التي هي ز ل، فالدعوى صحيحة وهي معنى حقيقي، وإن كانت هذه البقايا غير مساوية للبقية التي هي ز ل، فالدعوى باطلة ولا حقيقة لها. وقد كنا فصلنا ط ح مثل د هـ ود هـ أعظم من ب جـ، فـ ط ح أعظم من ب جـ. فنفصل من ط ح مثل ب جـ وليكن ك ح. وب جـ هو أعظم من آ، فـ ك ح أعظم من آ، ول ح مثل آ، فـ ك ح أعظم من ل ح. ولأن ل ح مثل ا وم جـ مثل آ، يكون ل ح مثل م جـ، ولأن ك ح مثل ب جـ

1 من العدد: منه [س] – 2 ن هـ: ن د [س] – 8 يـجـ: لح [ب] / ز ط: د ط [ب] – 9 ن هـ: ن م [س] / وم جـ: ناقصة [ب] / مجموع: ناقصة [ب] – 10 ز ط: ن ط [س] / ب م: كتب بعدها «مجموعة» [ب] / آ وط ح: ا جـ ط ح [س] – 12 وقد: فقد [ب] – 12-13 إلى آ هي ... ⟨آ⟩: المخطوطة متآكلة في هذا الموضع [س] – 13 ز ط: د ط [ب] / د ن: د ب [س] / ز ل: د ل [ب] – 15 مساوية: متساوية [س] – 17 ف ط ح: وط ح [س] / مثل: بمثل [ب] – 18 هو: ناقصة [ب] / من (الثانية): ناقصة [س]

à MC; puisque KH est égal à BC et que LH est égal à MC, KL est égal à BM, et puisque IH est égal à DE et que KH est égal à NE, IK est égal à DN. Les restes qui sont GI, IK et KL sont égaux aux restes qui sont GI, DN et BM. Mais ⟨la somme⟩ des restes GI, IK et KL est le reste GL tout entier. Et si les restes ont une somme égale à GL, alors l'énoncé est vrai et ne fait l'objet d'aucun doute. Ce que nous avons exposé est l'analyse de ce problème à partir de laquelle on a montré comment procéder par l'analyse pour ce problème et pour tout problème numérique, théorique et valable.

La synthèse de ce problème est: nous supposons les nombres successifs proportionnels, soient A, BC, DE et GH; nous séparons du second et du dernier ce qui est égal au premier, c'est-à-dire MC et LH. Nous séparons ensuite de GH ce qui est égal à DE, soit HI, et nous séparons de HI ce qui est égal à BC, soit HK. Il est clair ensuite que les restes — qui sont GI, IK et KL, dont la somme est GL — sont égaux aux excédents par lesquels les grandeurs GH, DE, BC et A se surpassent les unes les autres. Mais cette prémisse est celle à laquelle avait abouti l'analyse.

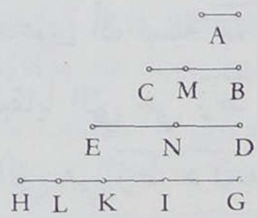
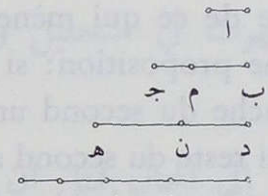


Fig. 5

De même, le rapport ⟨de la somme⟩ de ces restes à ⟨la somme⟩ des grandeurs DE, BC et A est égal au rapport de BM à A. Que les restes GI, IK et KL soient égaux aux excédents des grandeurs GH, DE, BC et A, les unes sur les autres, est évident car nous avons séparé les grandeurs HI, HK et HL égales aux grandeurs DE, BC et A. Que les rapports de ces restes aux grandeurs DE, BC et A soient égaux au rapport de BM à A; cela se montre ainsi: le rapport de GH à HI est égal au rapport de HI qui est retranché, à

ول ح مثل م ج، يكون ك ل مثل ب م؛ ولأن ط ح مثل د ه وك ح مثل ن ه يكون ط ك مثل د ن. فالفضلات التي هي ز ط ط ك ك ل مثل البقايا التي هي ز ط د ن ب م. وفضلات ز ط ط ك ك ل هي ⟨كل⟩ البقية التي هي ز ل. وإذا كانت البقايا مساوية ل ز ل فالدعوى صحيحة لا شك فيها. فهذا الذي ذكرناه هو تحليل هذه المسألة، وتبيّن منه كيفية التحليل لهذه المسألة ولكل مسألة عددية علمية حقيقية.

فأما تركيب هذه المسألة فهو أن نفرض الأعداد المتوالية المتناسبة وليكن آ ب ج د ه ز ح ونفصل من الثاني ومن الأخير مثل الأول وهما م ج ل ح. ثم نفصل من ز ح مثل د ه وليكن ح ط ونفصل من ح ط مثل ب ج وليكن ح ك. ثم يتبيّن أن الفضلات التي هي ز ط ط ك ك ل التي مجموعها ز ل مساوية للزيادات التي تزيد بها مقادير ز ح د ه ب ج ⟨آ⟩ بعضها على بعض، وهذه المقدمة هي التي كان التحليل انتهى إليها.



وأيضاً فإن نسبة هذه الفضلات إلى مقادير د ه ب ج آ هي نسبة ب م إلى آ. أما أن فضلات ز ط ط ك ك ل مساوية لزيادات مقادير ز ح د ه ب ج ⟨آ⟩ بعضها على بعض فهو بيّن، لأنا فصلنا مقادير ح ط ح ك ح ل مساوية لمقادير د ه ب ج آ. وأما أن نسب هذه الفضلات إلى مقادير د ه ب ج آ كنسبة ب م إلى آ فإنه يتبيّن هكذا: وهو أن نسبة ز ح إلى ح ط كنسبة ح ط المنقوص إلى ح ك

1 ب م: ب ج [س] / د ه: د ح [ب] / وك ح: وط ح [س] – 2 ز ط (الأولى والثانية): ن ط [س] – 5 وتبين: يتبين [س] – 6 تركيب: كتب «التركيب» ثم ضرب على «ال» بالقلم [ب] – 7 من (الثانية): في [س] – 9 ط ك: ك ط [س] وأثبت الكاف فوق السطر – 10-14 وهذه ... بعض: ناقصة [س]

HK, qui est retranché, et est égal au rapport de GI qui reste à IK qui reste. De même, le rapport de IH à HK est égal au rapport de HK à HL et est égal au rapport du reste, c'est-à-dire IK au reste, c'est-à-dire KL. Mais le rapport de IH à HK est égal au rapport de GH à HI, qui est égal au rapport de GI à IK, donc le rapport de GI à IK est égal au rapport de IK à KL. Si nous permutons, le rapport de GI à IH est égal au rapport de IK à KH.

De même, nous montrons que le rapport de IK à KH est égal au rapport de KL à LH, donc le rapport de GI à IH est égal au rapport de IK à KH et est égal au rapport de KL à LH. Mais le rapport de l'un des prédécesseurs à l'un des successeurs est égal au rapport de tous les prédécesseurs à tous les successeurs. Donc le rapport de KL à LH est égal au rapport de GL à la somme de IH, KH et LH; mais IH est égal à DE, KH est égal à BC, LH est égal à A et KL est égal à BM, donc le rapport de BM à A est égal au rapport de GL à la somme de DE, BC et A. Ce qu'il fallait démontrer.

Cette démonstration est l'inverse de l'analyse précédente, c'est-à-dire que les prémisses utilisées dans cette démonstration sont les prémisses qui sont apparues dans l'analyse, mais leur ordre est à l'inverse de leur ordre dans l'analyse.

— 5 — Quant à l'exemple de ce qui mène à l'impossible, c'est comme lorsqu'on dit dans cette même proposition: si on a des nombres successifs proportionnels et si on retranche du second un ⟨nombre⟩ égal au premier, alors le rapport du nombre qui reste du second au premier est égal au rapport du dernier nombre à la somme de tous les nombres qui le précèdent.

Si on analyse cette notion, alors la méthode de l'analyse est celle que nous avons exposée: nous examinons les propriétés des nombres successifs proportionnels et les propriétés de ce qu'on retranche d'eux. L'analyse aboutit à retrancher de chaque nombre le nombre qui le précède et on a des restes de sorte que le rapport de la somme des restes ⟨à la somme⟩ des nombres qui ont été retranchés est égal au rapport du reste du second ⟨nombre⟩ au

المنقوص، وكنسبة ز ط الباقي إلى ط ك الباقي. وكذلك نسبة ط ح إلى ح ك هي كنسبة ح ك إلى ح ل وكنسبة الباقي وهو ط ك إلى الباقي وهو ك ل. ونسبة ط ح إلى ح ك هي كنسبة ز ح إلى ح ط ⟨التي هي كنسبة ز ط إلى ط ك⟩، فنسبة ز ط إلى ط ك هي كنسبة ط ك إلى ك ل. وإذا بدلنا كانت نسبة ز ط إلى ط ح كنسبة ط ك إلى ك ح.

وكذلك نبيّن أن نسبة ط ك إلى ك ح كنسبة ك ل إلى ل ح، فنسبة ز ط إلى ط ح كنسبة ط ك إلى ك ح وكنسبة ك ل إلى ل ح. ونسبة واحد من المقدمات إلى واحد من التوالي كنسبة كل المقدمات إلى كل التوالي. فنسبة ك ل إلى ل ح كنسبة ز ل إلى مجموع ط ح ك ح ل ح؛ وط ح مثل د هـ، وك ح مثل ب ج ول ح مثل آ وك ل مثل ب م، فنسبة ب م إلى آ كنسبة ز ل إلى مجموع د هـ ب ج آ؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

وهذا البرهان هو عكس التحليل الذي تقدم، أعني أن المقدمات المستعملة في هذا البرهان هي المقدمات التي ظهرت في التحليل وترتيبها هو بالعكس من ترتيبها في التحليل.

⟨هـ⟩ فأما المثال فيما يؤدي إلى المحال فمثل أن يقال في هذا الشكل بعينه: إذا كانت أعداد متوالية متناسبة ونقص من الثاني مثل الأول، فإن نسبة العدد الباقي من الثاني إلى الأول هي كنسبة العدد الأخير إلى جميع الأعداد التي قبله.

فإن هذا المعنى إذا حلل، فطريق تحليله هو الطريق الذي ذكرناه، وهو أن ننظر في خواص الأعداد المتوالية المتناسبة وفي خواص ما ينقص منها. فينتهي التحليل إلى أن ينقص من كل عدد العدد الذي قبله، وتبقى بقايا وتكون نسبة جميع البقايا إلى الأعداد التي نقصت منها كنسبة بقية الثاني إلى العدد الأول. والأعداد التي نقصت منها

3-2 إلى ح ك: ناقصة [ب] – 6 نبين: يتبين [س] / ز ط: د ط [ب] – 12 هذا: ناقصة [ب] – 13 وترتيبها: وترتبها [ب، س] / وترتيبها: وترتبها [ب، س] – 16 ونقص: وبعض [س] / العدد: ناقصة [س]

premier nombre. Mais les nombres desquels on a retranché les nombres qui les précèdent sont des nombres mesurés par le premier, et les retranchés sont tous les nombres qui précèdent le dernier; le rapport de la somme des restes à la somme des nombres qui précèdent le dernier est donc le rapport du reste du second au premier nombre. Or, l'énoncé est que le rapport du reste du second au premier nombre est égal au rapport du dernier nombre à la somme des nombres qui le précèdent. Il s'ensuit par l'analyse que la somme des restes est égale au dernier nombre, si on retranche de chaque dernier nombre[17] le nombre qui le précède, alors ⟨la somme⟩ des restes sera inférieure au dernier nombre d'une quantité égale au premier nombre. Car on a montré dans la première analyse que la somme des restes est égale au nombre GL et que LH est égal au premier. Cette deuxième analyse mène donc à ce que la somme des restes est le nombre GL; or il fallait que la somme des restes soit égale à GH tout entier. Il est alors nécessaire d'après cette analyse que GL soit égal à GH,
B-74r ce qui est impossible./ L'analyse dans laquelle on a supposé ⟨vrai⟩ l'énoncé, c'est-à-dire le rapport du reste du second au premier est égal au rapport du dernier nombre tout entier à la somme de tous les nombres qui le précèdent, a conduit à cette impossibilité.

Si l'analyse a mené à une notion fausse, la notion recherchée est fausse et n'a aucune vérité, car l'impossibilité provient d'avoir supposé la notion recherchée telle qu'elle. Cette analyse elle-même est une démonstration que la
S-321r notion / recherchée est impossible, si on fait de cette analyse une démonstration par l'absurde comme nous l'avons montré précédemment. C'est selon cet exemple que se fera l'analyse de notions numériques et théoriques, si elles sont fausses.

⟨6⟩ Quant à l'exemple dans la partie pratique avec discussion des problèmes numériques, tel est notre énoncé: diviser deux nombres donnés suivant deux rapports donnés.

Soient les deux nombres AB et CD et les deux rapports, le rapport de H à I et le rapport de K à L.

L'analyse de ce problème se fera de la manière suivante: nous supposons que les deux nombres ont été divisés aux deux points E et G, que le rapport de AE à CG est égal au rapport de H à I, que le rapport de EB à GD est égal au rapport de K à L et que le rapport de H à I n'est pas égal au rapport de K

17. Littéralement: on retranche du dernier nombre. Il est évident que par «dernier», il entend un nombre qui a un prédécesseur.

الأعدادَ التي قبلها هي الأعداد التي يعدّها الأول، والمنقوصات هي جميع الأعداد التي قبل الأخير، فيكون نسبة جميع البقايا إلى جميع الأعداد التي قبل الأخير هي نسبة بقية الثاني إلى العدد الأول. والدعوى هي أن نسبة بقية الثاني إلى العدد الأول كنسبة العدد الأخير إلى جميع الأعداد التي قبله. فيلزم من التحليل أن يكون جميع البقايا مساوية للعدد الأخير، فإذا نقص من العدد الأخير كل واحد من الأعداد التي قبله، كانت البقايا تنقص عن العدد الأخير بمقدار العدد الأول. لأنه قد تبيّن في التحليل الأول أن 〈جميع〉 البقايا مساوية لعدد زل ول ح مثل الأول، فيكون هذا التحليل الثاني قد أدى إلى أن 〈جميع〉 البقايا هي عدد زل، وكان يجب أن يكون 〈جميع〉 البقايا مساوية لجميع زح، فيلزم من هذا التحليل أن يكون زل مثل زح، وهذا محال، وهذا المحال أدى / إليه التحليل الذي فرض فيه الدعوى التي هي: أن نسبة بقية ب – ٧٤ – و
الثاني إلى الأول هي نسبة جميع العدد الأخير إلى جميع الأعداد التي قبله.

وإذا كان التحليل قد أدى إلى معنى باطل، فالمعنى المبحوث عنه باطل ولا حقيقة له، لأن المحال إنما عرض من فرضنا المعنى المبحوث عنه على ما هو عليه، وهذا التحليل بعينه هو برهان على أن المعنى / المبحوث عنه محال إذا جعل هذا التحليل برهاناً بالخلف س – ٣٢١ –
كما بينّا فيما تقدم، فعلى هذا المثال يكون تحليل المعاني العددية العلمية إذا كانت باطلة.

〈و〉 فأما المثال في القسم العملي المحدود من المسائل العددية، فمثل قولنا: نريد أن نقسم عددين مفروضين بنسبتين مفروضتين.

فليكن العددان اب جد والنسبتان نسبة ح إلى ط ونسبة ك إلى ل.

وتحليل هذه المسألة يكون على هذه الصفة: نفرض أن العددين قد انقسما على نقطتي هـ ز وصارت نسبة اه إلى جز كنسبة ح إلى ط ونسبة هب إلى زد كنسبة ك إلى ل، ونسبة ح إلى ط ليست كنسبة ك إلى ل فيكون نسبة اه إلى جز ليست

1 يعدّها: يعد [ب، س] – 2 فيكون ... الأخير: ناقصة [ب] – 3 إلى (الثانية): ناقصة [س] – 5 فإذا: واذا [س] – 9 وهذا: او هذا [ب] – 12 وإذا: واذ [س] – 13 المبحوث: أثبتها في الهامش [س] – 20 ز د: ز و [س] – 21 جـ ز: حـ و [س]

à L. Donc le rapport de AE à CG n'est pas égal au rapport de EB à GD. Il est nécessaire que l'analyste examine les propriétés des différents rapports. S'il examine les propriétés des différents rapports, il lui sera clair que l'un des deux rapports est plus grand que l'autre. Il s'ensuit que l'un des deux rapports, AE à CG et EB à GD, est plus grand que l'autre. C'est tout ce qui peut se dégager ici. Si donc l'analyste n'ajoute rien à cet objet qui puisse dégager une propriété supplémentaire, la recherche de cette notion ne s'achèvera pas. Or cet ajout requiert l'intuition pour que l'ajout engendre une propriété supplémentaire. L'ajout qui engendre une propriété supplémentaire est d'accroître le plus petit des deux rapports pour qu'il devienne comme le plus grand ou de diminuer le plus grand rapport pour qu'il devienne comme le plus petit. Soit le rapport de EB à GD plus petit que le rapport de AE à CG. Posons le rapport de EB à GM égal au rapport de AE à CG, donc GM plus petit que GD et le rapport de AB à CM sera égal au rapport de AE à CG. Mais le rapport de AE à CG est égal au rapport de H à I. Le rapport de AB à CM est donc égal au rapport de H à I. Mais le rapport de AB à CM est plus grand que le rapport de AB à CD, donc le rapport de AB à CD est plus petit que le rapport de H à I. De même, puisque le rapport de EB à GD est plus petit que le rapport de AE à CG, le rapport de EB à GD est égal au rapport de AE à un nombre plus grand que GC, que celui-ci soit le nombre GP tout entier. Le rapport de AE à PG est donc égal au rapport de EB à GD et est égal au rapport de AB tout entier à PD tout entier. Donc le rapport de AB à PD est égal au rapport de EB à GD. Mais le rapport de EB à GD est égal au rapport de K à L, donc le rapport de AB à PD est égal au rapport de K à L. Mais le rapport de AB à PD est plus petit que le rapport de AB à CD, donc le rapport de AB à CD est plus grand que le rapport de K à L. Le rapport de AB à CD est donc plus grand que l'un des deux rapports supposés et plus petit que l'autre rapport.

L'analyse a donc mené à ce que le rapport de l'un des deux nombres supposés à l'autre est plus grand que l'un des deux rapports supposés et plus petit que l'autre rapport, et à ce que l'un des deux rapports donnés est le

كنسبة ه ب إلى ز د. فينبغي للمحلل أن ينظر في خواص النسب المختلفة. وإذا نظر في خواص النسب المختلفة، تبيّن له أن إحدى النسبتين أعظم من الأخرى، فيلزم من ذلك أن تكون إحدى نسبتي ا ه إلى جـ ز وه ب إلى ز د أعظم من الأخرى. فهذا القدر هو الذي يظهر في هذا الموضع. فإن لم يزد المحلل على هذا الموضوع زيادة تظهر بها خاصة زائدة، لم يتم البحث عن هذا المعنى؛ وهذه الزيادة هي التي تحتاج إلى الحدس حتى تكون الزيادة تولد خاصة زائدة، والزيادة التي تولد خاصة زائدة هي أن نزيد ⟨في⟩ أصغر النسبتين ⟨حتى تصير⟩ مثل أعظمهما أو ننقص من أعظم النسبتين حتى تصير مثل أصغرهما. وليكن نسبة ه ب إلى ز د أصغر من نسبة ا ه إلى جـ ز، فنجعل نسبة ه ب إلى ز م كنسبة ا ه إلى جـ ز، فيكون ز م أصغر من ز د وتكون نسبة ا ب إلى جـ م كنسبة ا ه إلى جـ ز؛ ونسبة ا ه إلى جـ ز هي كنسبة ح إلى ط، فيكون نسبة ا ب إلى جـ م كنسبة ح إلى ط. ونسبة ا ب إلى جـ م أعظم من نسبة ا ب إلى جـ د، فنسبة ا ب إلى جـ د أصغر من نسبة ح إلى ط. وأيضاً فلأن نسبة ه ب إلى ز د أصغر من نسبة ا ه إلى جـ ز، يكون نسبة ه ب إلى ز د كنسبة ا ه إلى عدد هو أعظم من ز جـ، فليكن ذلك جميع العدد ز ف. فتكون نسبة ا ه إلى ف ز كنسبة ه ب إلى ز د وكنسبة جميع ا ب إلى جميع ف د. فيكون نسبة ا ب إلى ف د كنسبة ه ب إلى ز د. ونسبة ه ب إلى ز د هي كنسبة ك إلى ل، فنسبة ا ب إلى ف د كنسبة ك إلى ل ونسبة ا ب إلى ف د أصغر من نسبة ا ب إلى جـ د، فنسبة ا ب إلى جـ د أعظم من نسبة ك إلى ل. فنسبة ا ب إلى جـ د أعظم من إحدى النسبتين المفروضتين وأصغر من النسبة الأخرى.

فقد أدى التحليل إلى أن نسبة أحد العددين المفروضين إلى الآخر أعظم من إحدى النسبتين المفروضتين وأصغر من النسبة الأخرى، وإلى أن إحدى النسبتين المفروضتين

1 للمحلل : للمحل [ب] – 4 القدر : العدد [ب] – 5 وهذه : وهذا [س] – 6 نزيد : ننقص من [ب، س] – 7 ننقص من : نزيد في [ب، س] / حتى : معنى [س] – 8 ز د : ب د [ب] – 9 جـ ز : جـ د [س] / ا ب : ناقصة [س] – 14 جميع : ناقصة [ب] / ف ز : ز ف [س] – 20 العددين... إحدى : مكررة [ب]

rapport de l'un des deux nombres à une partie de l'autre, et que l'autre rapport est le rapport de ce nombre à un nombre plus grand que l'autre. Que l'analyste examine à ce stade le rapport des deux nombres donnés; s'il est plus grand que l'un des deux rapports et plus petit que l'autre, alors ce que l'on recherche est possible, et s'il n'est pas plus grand que l'un des deux rapports et plus petit que l'autre, alors ce que l'on recherche n'est pas possible.

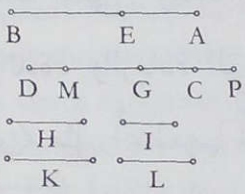


Fig. 6

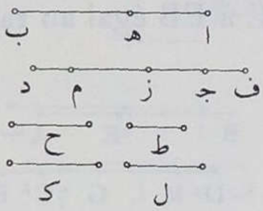
L'analyse a également abouti à ce que le rapport de AE à PG est égal au rapport de EB à GD, donc le rapport AE à EB est égal au rapport de PG à GD. Nous trouvons aussi que le rapport de AB à CM est égal au rapport de AE à CG, donc le rapport de AE à CG est égal au rapport de EB à GM. Donc le rapport de AE à EB est égal au rapport de CG à GM. Mais le rapport de AE à EB est égal au rapport de PG à GD, donc le rapport de CG à GM est égal au rapport de PG à GD et est égal au rapport du reste, qui est PC, au reste, qui est MD.

L'analyse a donc abouti à ce que le rapport de deux parties de CM, l'une à l'autre, est égal au rapport de CP qui est l'excédent de PD sur DC à MC qui est la différence entre CM tout entier et CD. Cette notion est possible et n'est pas difficile, c'est-à-dire qu'il est possible de partager CM en deux parties telles que le rapport de l'une à l'autre soit égal au rapport de PC, qui est l'excédent, à MD qui est la différence.

Si l'analyse aboutit à une notion possible, si cette analyse est alors inversée et composée, elle produit ce que l'on cherche; les propriétés qui ont été dégagées par l'analyse seront des prémisses à partir desquelles on compose un
B-74v syllogisme démonstratif qui indique la vérité de l'existence / de ce que l'on cherche.

La synthèse de ce problème se fera comme nous allons le décrire: nous

هي نسبة أحد العددين إلى بعض الآخر وأن النسبة الأخرى هي نسبة ذلك العدد إلى عدد أعظم من الآخر. فلينظر المحلل عند هذه الحال في نسبة العددين المفروضين؛ فإن كانت أعظم من إحدى النسبتين وأصغر من الأخرى، فإن المطلوب ممكن، وإن كانت ليست أعظم من إحدى النسبتين وأصغر من الأخرى، فإن المطلوب غير ممكن.



فقد انتهى التحليل أيضاً إلى أن نسبة ا هـ إلى ف ز كنسبة هـ ب إلى ز د، فيكون نسبة ا هـ إلى هـ ب كنسبة ف ز إلى ز د. ونجد أيضاً أن نسبة ا ب إلى جـ م كنسبة ا هـ إلى جـ ز، فيكون نسبة ا هـ إلى جـ ز كنسبة هـ ب إلى ز م. فيكون نسبة ا هـ إلى هـ ب كنسبة جـ ز إلى ز م. وقد كانت نسبة ا هـ إلى هـ ب كنسبة ف ز إلى ز د، فيكون نسبة جـ ز إلى ز م كنسبة ف ز إلى ز د وكنسبة الباقي – وهو ف جـ – إلى الباقي وهو م د.

فقد انتهى التحليل إلى أن نسبة قسمي جـ م – أحدهما إلى الآخر – كنسبة جـ ف – التي هي زيادة ف د على د جـ – إلى م جـ الذي هو نقصان جميع جـ م عن جـ د. وهذا المعنى ممكن غير متعذر، أعني أنه يمكن أن يقسم جـ م بقسمين تكون نسبة أحدهما إلى الآخر كنسبة ف جـ – التي هي الزيادة – إلى م د الذي هو النقصان.

وإذْ قد انتهى التحليل إلى معنى ممكن، فإن هذا التحليل إذا عُكس ورُكب أنتج المطلوب؛ وكانت الخواص التي ظهرت بالتحليل مقدمات يتركب منها قياس برهاني يدل على صحة وجود / المطلوب. ب – ٧٤ – ظ

وتركيب هذه المسألة يكون كما نصف: نفرض المقدارين والنسبتين، وليكن نسبة

1-2 وأن ... الآخر: مكررة [ب] – 1 الأخرى: ناقصة [ب] – 5 فقد: وقد [س] / ف ز: ف د [س] – 9 ز م: د م [س] / ف جـ: م جـ [ب] – 10 إلى (الأولى): ناقصة [س] – 11 د جـ: ر جـ [س] / جميع: ناقصة [س] – 14 التحليل إلى معنى: مكررة [س]

supposons ⟨donnés⟩ les deux grandeurs et les deux rapports, que le rapport de l'une des deux grandeurs à l'autre soit plus grand que l'un des deux rapports et plus petit que l'autre rapport. Nous posons le rapport de AB à CM égal au rapport de H à I qui est le plus grand des deux rapports, CM sera donc plus petit que CD. Nous posons le rapport de AB à DP égal au rapport de K à L qui est le plus petit des deux rapports, DP sera alors plus grand que CD. Nous posons le rapport de CG à GM égal au rapport de PC à MD et nous posons le rapport de AE à EB égal au rapport de CG à GM.

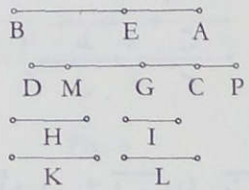


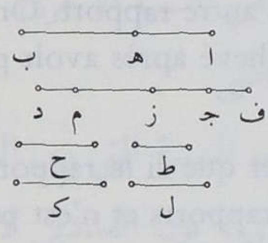
Fig. 7

S-321v Je dis que le rapport de AE à GC / est égal au rapport de H à I et que le rapport de EB à GD est égal au rapport de K à L.

Démonstration: Le rapport de CG à GM est égal au rapport de CP à MD, donc le rapport de CG à GM est égal au rapport de PG à GD. Mais le rapport de CG à GM est égal au rapport de AE à EB, donc le rapport de AE à EB est égal au rapport de PG à GD. Si nous permutons, le rapport de AE à PG sera donc égal au rapport de EB à GD et égal au rapport de AB tout entier à PD tout entier. Mais le rapport de AB à PD est égal au rapport de K à L, donc le rapport de EB à GD est égal au rapport de K à L.

De même, puisque le rapport de AE à EB est égal au rapport de CG à GM, le rapport de AE à CG est égal au rapport de EB à GM et est égal au rapport de AB tout entier à CM tout entier, le rapport de AE à CG est donc égal au rapport de AB à CM. Mais le rapport de AB à CM est égal au rapport de H à I, donc le rapport de AE à CG est égal au rapport de H à I. Nous avons donc partagé chacun des deux nombres AB et CD en deux parties, de sorte que le rapport de l'une des deux parties de AB à l'une des deux parties de CD soit

أحد المقدارين إلى الآخر أعظم من إحدى النسبتين وأصغر من النسبة الأخرى، ونجعل نسبة اب إلى جم كنسبة ح إلى ط التي هي أعظم النسبتين، فيكون جم أصغر من جد ونجعل نسبة اب إلى دف كنسبة ك إلى ل التي هي أصغر النسبتين، فيكون دف أعظم من جد، ونجعل نسبة جز إلى زم كنسبة فج إلى مد، ونجعل نسبة اه إلى هب كنسبة جز إلى زم.



فأقول: إن نسبة اه إلى زج / كنسبة ح إلى ط وإن نسبة هب إلى زد كنسبة ك إلى ل. س - ٣٢١

برهان ذلك: أن نسبة جز إلى زم كنسبة جف إلى مد، فنسبة جز إلى زم كنسبة فز إلى زد. ونسبة جز إلى زم هي كنسبة اه إلى هب، فنسبة اه إلى هب هي كنسبة فز إلى زد. فإذا بدلنا كانت نسبة اه إلى فز كنسبة هب إلى زد وكنسبة جميع اب إلى جميع فد. ونسبة اب إلى فد هي كنسبة ك إلى ل، فنسبة هب إلى زد هي كنسبة ك إلى ل.

وأيضاً من أجل أن نسبة اه إلى هب كنسبة جز إلى زم تكون نسبة اه إلى جز كنسبة هب إلى زم وكنسبة جميع اب إلى جميع جم فيكون نسبة اه إلى جز كنسبة اب إلى جم. ونسبة اب إلى جم هي كنسبة ح إلى ط، فنسبة اه إلى جز هي كنسبة ح إلى ط. فقد قسمنا كل واحد من عددي اب جد بقسمين حتى صارت نسبة أحد قسمي اب إلى أحد قسمي جد كنسبة ح إلى ط وصارت نسبة

6 زج: جز [س] / هب: هف [ب، س] – 8 جف: فج [س] – 9 جز: ج [س] / فز ... هي كنسبة: مكررة [س] – 13-14 جز ... جز كنسبة: ناقصة [ب] – 14 جز (الأولى): هز [ب] – 17 أحد: واحد [س] / اب إلى أحد قسمي: ناقصة [ب]

égal au rapport de H à I et que le rapport de l'autre partie de AB à l'autre partie de CD soit égal au rapport de K à L. Ce qu'il fallait démontrer.

C'est de cette manière que se fera la synthèse de ce problème. Toutes les prémisses que nous avons utilisées dans la division et dans la démonstration de la vérité de la division sont les propriétés qui ont été dégagées au cours de l'analyse. Leur élaboration a été faite grâce aux ajouts et à la poursuite de la recherche. Mais cette construction a été réalisée en supposant que le rapport de l'une des deux grandeurs à l'autre est plus grand que l'un des deux rapports et est plus petit que l'autre rapport. Or cette notion est la discussion de ce problème, car il a été achevé après avoir pris seulement pour condition cette notion.

Il nous reste donc à montrer que si le rapport des deux nombres n'est pas plus grand que l'un des deux rapports et n'est pas plus petit que l'autre, alors les deux nombres ne peuvent pas être partagés suivant les deux rapports.

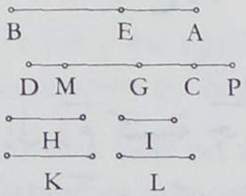


Fig. 8

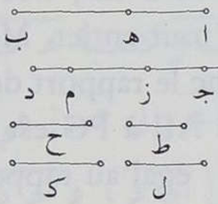
Reprenons les deux nombres et les deux rapports. Que le rapport de AB à CD ne soit pas plus grand que l'un des deux rapports et plus petit que l'autre, alors le rapport de AB à CD sera ou bien égal à l'un des deux rapports ou bien plus grand ou bien plus petit que les deux.

Que le rapport de AB à CD soit d'abord égal à l'un des deux rapports qui est le rapport de H à I. Supposons que les deux nombres ont été partagés suivant les deux rapports comme nous l'avons fait précédemment, et que le rapport de AE à CG soit égal au rapport de H à I. Le rapport de EB à GD est donc égal au rapport de K à L. Puisque le rapport de AB à CD est égal au rapport de H à I et que le rapport de AE à CG est égal au rapport de H à I, le rapport de AE à CG est égal au rapport de AB à CD. Donc le rapport de EB à GD est égal au rapport de AB à CD et est égal au rapport de H à I. Mais le

القسم الآخرمن ا ب إلى القسم الآخر من ج د كنسبة ك إلى ل؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

فعلى هذه الصفة يكون تركيب هذه المسألة. وجميع المقدمات التي استعملناها في القسمة وفي البرهان على صحة القسمة هي الخواص التي ظهرت في التحليل وكان ظهورها بالزيادات والتصيّد. وهذا العمل إنما تم بفرضنا نسبة أحد المقدارين إلى الآخر أعظم من إحدى النسبتين وأصغر من النسبة الأخرى. وهذا المعنى هو تحديد هذه المسألة لأنها إنّما تمت بعد إشراط هذا المعنى.

فقد بقي أن نبين أنه إذا كانت النسبة التي بين العددين ليست بأعظم من إحدى النسبتين وأصغر من النسبة الأخرى، فإن العددين لا يمكن أن يُقسما بالنسبتين.



فلنعد العددين والنسبتين؛ وليكن نسبة ا ب إلى ج د ليست أعظم من إحدى النسبتين وأصغر من الأخرى، فيكون نسبة ا ب إلى ج د إما مساوية لإحدى النسبتين وإما أعظم منهما وإما أصغر منهما.

فلتكن أولاً نسبة ا ب إلى ج د مساوية لإحدى النسبتين وهي نسبة ح إلى ط. ونفرض أن العددين قد انقسما على النسبتين كما فعلنا من قبل، وليكن نسبة ا ه إلى ج ز كنسبة ح إلى ط. فنسبة ه ب إلى ز د كنسبة ك إلى ل. فلأن نسبة ا ب إلى ج د كنسبة ح إلى ط ونسبة ا ه إلى ج ز كنسبة ح إلى ط، يكون نسبة ا ه إلى ج ز كنسبة ا ب إلى ج د، فيكون نسبة ه ب إلى ز د كنسبة ا ب إلى ج د وكنسبة ح إلى

1 إلى : كنسبة [ب] – 2 نبين : نعمل [س] – 3 استعملناها : استعانا [س] – 4 وكان : وكانت [س] – 7 إنما : ناقصة [ب] / إشراط : اشرابط [ب] – 8 بأعظم : اعظم [س] – 9 الأخرى : الاخرى وهذا [ب] – 12 منهما (الأولى والثانية) : منها [ب] – 15 فنسبة : ونسبة [س]

rapport de EB à GD était égal au rapport de K à L, donc le rapport de H à I est égal au rapport de K à L. Mais ces deux rapports étaient différents par hypothèse, ce qui est impossible.

L'analyse a donc abouti à une prémisse qui n'est pas donnée, on ne peut donc pas faire la synthèse de cette analyse, car la dernière prémisse à laquelle l'analyse a abouti n'est pas donnée. S'il n'est pas possible de faire la synthèse de l'analyse, on ne peut pas achever la division cherchée, ni établir la démonstration de la vérité de celle-ci.

Si le rapport de AB à CD est plus grand que les deux rapports, supposons ⟨donné⟩ ce que l'on cherche, c'est-à-dire que le rapport de AE à CG est égal au rapport de H à I et que le rapport de EB à GD est égal au rapport de K à L. Le rapport de AB à CD sera donc plus grand que le rapport de AE à CG, et plus grand que le rapport de EB à GD. Posons le rapport de AE à PG égal au rapport de AB à CD, PG sera donc plus petit que CG. Posons le rapport de EB à GM égal au rapport de AB à CD, GM sera donc plus petit que GD. PM sera donc plus petit que CD tout entier. Mais le rapport de AE à PG est égal au rapport de EB à GM, donc le rapport de AE à PG est égal au rapport de AB à PM. Mais le rapport de AE à PG est égal au rapport de AB à CD,
S. 322r donc le rapport de AB à PM est / égal au rapport de AB à CD, donc CD est égal à PM, ce qui est impossible.

Si le rapport de AB à CD est plus petit que les deux rapports, alors la somme de PG et GM est plus grande que CD; or il est nécessaire qu'elle lui soit égale.

Ainsi, quand le rapport de AB à CD n'est pas plus grand que l'un des deux rapports et plus petit que l'autre rapport, l'analyse aboutit à une prémisse fausse. Et si l'analyse aboutit à une prémisse fausse, cette analyse sera une démonstration que ce que l'on recherche n'est pas possible et ne peut pas exister si on fait de cette analyse une démonstration par l'absurde, comme nous l'avons fait dans cette analyse. Ce que nous avons montré est une démonstration / de la discussion.

⟨7⟩ Quant à l'exemple dans la partie pratique sans discussion des problèmes

ط. وقد كانت نسبة هـ ب إلى ز د كنسبة ك إلى ل، فنسبة ح إلى ط كنسبة ك إلى ل. لكن هاتين النسبتين بالفرض مختلفتان، وهذا محال.

فقد انتهى التحليل إلى مقدمة غير معطاة، فليس يمكن أن يُركّب هذا التحليل، لأن المقدمة الأخيرة التي انتهى إليها التحليل غير معطاة. وإذا لم يمكن أن يُركّب التحليل، فليس تتم القسمة المطلوبة ولا يقوم البرهان على صحتها.

وإن كانت نسبة ا ب إلى ج د أعظم من النسبتين، فلنفرض المطلوب، وهو أن نسبة ا هـ إلى ج ز كنسبة ح إلى ط ونسبة هـ ب إلى ز د كنسبة ك إلى ل. فيكون نسبة ا ب إلى ج د أعظم من نسبة ا هـ إلى ج ز وأعظم من نسبة هـ ب إلى ز د. فنجعل نسبة ا هـ إلى ف ز كنسبة ا ب إلى ج د، فيكون ف ز أصغر من ج ز. ونجعل نسبة هـ ب إلى ز م كنسبة ا ب إلى ج د، فيكون ز م أصغر من ز د. فيكون ف م أصغر من جميع ج د. ويكون نسبة ا هـ إلى ف ز كنسبة هـ ب إلى ز م، فيكون نسبة ا هـ إلى ف ز كنسبة ا ب إلى ف م. ونسبة ا هـ إلى ف ز هي كنسبة ا ب إلى ج د، فنسبة ا ب إلى ف م هي / كنسبة ا ب إلى ج د، ف ج د مثل ف م، وهذا محال. س – ٣٢٢ – و

وإن كانت نسبة ا ب إلى ج د أصغر من النسبتين، كان ف ز و ز م مجموعين أعظم من ج د، ويلزم أن يكونا مساويين له.

فمتى كانت نسبة ا ب إلى ج د ليست بأعظم من إحدى النسبتين وأصغر من النسبة الأخرى، انتهى التحليل إلى مقدمة باطلة، وإذا انتهى التحليل إلى مقدمة باطلة، كان ذلك التحليل برهاناً على أن المطلوب غير ممكن ولا يصح وجوده إذا جُعل ذلك التحليل برهاناً بالخلف كما فعلنا في هذا التحليل. وهذا الذي بيّناه هو برهان / التحديد. ب – ٧٥ – و

⟨ز⟩ وأما المثال في القسم العملي الغير محدود من المسائل العددية التي تقع بوجه

2 مختلفتان: مختلفين [ب، س] – 8 ج ز: ج د [س] – 9 ف ز: ف د [س] – 12 ف م: بم [ب] / هي: ناقصة [ب] – 12-13 فنسبة ... ج د: ناقصة [ب] – 14 ف ز: ف د [س] – 17-18 وإذا ... باطلة: ناقصة [ب] – 18-19 على ... برهاناً: مكررة [س] – 21 التي: الذي [ب]

numériques qui ont lieu d'une seule façon, tel est notre énoncé: partager un nombre donné en deux parties, de deux manières, de sorte que la grande partie dans la première division soit le double de la petite partie dans la deuxième division et que la grande partie dans la deuxième division soit le triple de la petite partie dans la première division.

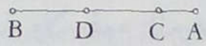


Fig. 9

Que le nombre donné soit AB, nous voulons partager AB en deux parties deux fois de la manière que nous avons présentée. Supposons que le nombre AB a été partagé en deux parties, deux fois, aux deux points C et D: la première division au point C, la grande partie étant CB, et la deuxième division au point D, la grande partie étant AD. CB sera le double de BD, donc CD est égal à DB. Mais AD est trois fois AC, donc DC est le double de AC; or CD est égal à DB, donc BC est quatre fois CA, donc AB est cinq fois AC. Mais AB est connu, donc AC est connu et chacun des ⟨nombres⟩ AC et CB est connu; DB est la moitié de BC, donc BD est connu. Les deux parties AC et CB sont connues et les deux parties AD et DB sont connues.

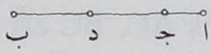
L'analyse a abouti à des parties connues, et dont le rapport à la totalité du nombre est connu. Mais tout nombre peut être divisé en parties dont le rapport à la totalité du nombre est connu. Et s'il y a des fractions dans les parties, alors si on multiplie le nombre par les nombres homonymes des fractions, les nombres seront tous des entiers.

Cette analyse a abouti à une notion possible: la division d'un nombre en parties connues. Si on inverse cette analyse, on achève par elle la construction et on établit par l'analyse la démonstration de la vérité de celle-ci. Cette analyse est de celles qui n'ont pas besoin d'ajout à l'objet.

La synthèse de ce problème se fera en séparant[18] du nombre AB son cinquième, c'est la prémisse à laquelle a abouti l'analyse, soit AC; partageons CB en deux moitiés au point D.

18. Littéralement: en divisant.

واحد، فمثل قولنا : نريد أن نقسم عدداً معلوماً بقسمين مرتين حتى يكون القسم الأعظم في القسمة الأولى ضعف القسم الأصغر في القسمة الثانية ويكون القسم الأعظم في القسمة الثانية ثلاثة أمثال القسم الأصغر في القسمة الأولى.



وليكن العدد المفروض اب، ونريد أن نقسم اب بقسمين مرتين على الصفة التي قدمناها، فلنفرض أن عدد اب قد قُسم بقسمين مرتين على نقطتي جـ د، وأن القسمة الأولى على نقطة جـ وأن القسم الأعظم جـ ب، وأن القسمة الثانية على نقطة د وأن القسم الأعظم اد، فيكون جـ ب ضعف ب د فيكون جـ د مثل د ب، ويكون اد ثلاثة أمثال اجـ فيكون د جـ ضعف اجـ، وقد كان جـ د مثل د ب، فيكون ب جـ أربعة أمثال جـ ا، فيكون اب خمسة أمثال اجـ. واب معلوم فاجـ معلوم، فكل واحد من اجـ وجـ ب معلوم، ود ب نصف ب جـ، فب د معلوم. فقسما اجـ جـ ب معلومان، وقسما اد د ب معلومان.

فقد انتهى التحليل إلى أقسام معلومة ومعلومة النسبة إلى جملة العدد. وكل عدد فيمكن أن يُقسم بأقسام معلومة النسبة إلى جملة العدد. وإن كان في الأقسام كسور فإن العدد إذا ضُرب في الأعداد السّمية للكسور صارت جميع الأعداد صحاحاً. فقد انتهى التحليل إلى معنى ممكن : وهو قسمة العدد إلى أجزاء معلومة. فإذا عُكس هذا التحليل تمّ به العمل وقام به البرهان على صحته. وهذا التحليل هو من التحليل الذي لا يحتاج إلى زيادة في الموضوع.

وتركيب هذه المسألة يكون بأن نقسم من عدد اب خُمسه، وهي المقدمة التي انتهى إليها التحليل، وليكن اجـ ؛ ونقسم جـ ب بنصفين على نقطة د.

7 ب د : ب جـ [ب] – 12 ومعلومة : مكررة [س] – 14 للكسور : الكسور [س] / الأعداد : الاقسام [س] – 16 به (الثانية) : ناقصة [ب] – 19 اجـ ونقسم : اجـ ه يقسم [س]

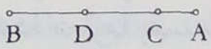


Fig. 10

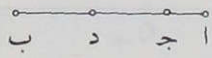
Nous disons: nous avons partagé AB suivant les deux rapports recherchés.

Démonstration: AB est cinq fois AC, BC est donc quatre fois CA. BD est la moitié de BC, donc CB est le double de BD qui est l'un des deux ⟨nombres⟩ cherchés. Mais puisque CB est quatre fois CA et que CD est la moitié de CB, CD est le double de CA. Donc DA est trois fois AC et il est le second ⟨nombre⟩ recherché. AB a donc été partagé deux fois de la façon cherchée. Ce qu'il fallait faire.

Cette partie, parmi les parties pratiques, ne peut s'achever que d'une seule manière, puisqu'un seul nombre n'a qu'un seul cinquième et que ses quatre cinquièmes ne se partagent en deux moitiés que par un seule division; un nombre ne se partage donc suivant les deux rapports mentionnés que d'une seule manière.

⟨8⟩ Quant à l'exemple dans la partie pratique sans discussion des problèmes numériques indéterminés, tel est notre énoncé: trouver deux nombres carrés dont la somme est un carré.

Supposons que cela a été trouvé et que ces deux nombres sont AC et CB, AB est donc un carré. Que le nombre DE soit le côté du carré AB et le nombre DG le côté du carré AC, donc le carré de DE est le nombre AB et le carré de DG est le nombre AC. L'excédent du carré de DE sur le carré de DG est donc le nombre CB et l'excédent du carré de DE sur le carré de DG est le
S-322v carré de EG plus le double produit de DG par GE./ La somme du carré de EG plus le double produit de DG par GE est un nombre carré, car il est égal à CB qui est un carré. Si on retranche du carré CB le carré de EG, le reste est le double produit de DG par GE, sa moitié est donc le produit de DG par GE. Mais si on divise le produit de DG par GE, par EG, on obtient GD de la division. Si donc on retranche du carré CB le carré de EG et si on prend la moitié du reste que l'on divise par EG, on obtient GD de la division; si on multiplie ensuite GD par lui-même, on a AC, et AC plus CB est AB qui est le carré de DE.



فنقول : إنا قد قسمنا ا ب على النسبتين المطلوبتين.

برهان ذلك : أن ا ب خمسة أمثال ا ج ، ف ب ج أربعة أمثال ج ا. و ب د نصف ب ج ، ف ج ب ضعف ب د وهو أحد المطلوبين. ولأن ج ب أربعة أمثال ج ا و ج د نصف ج ب ، يكون ج د ضعف ج ا. ف د ا ثلاثة أمثال ا ج وهو المطلوب الآخر. فقد قسم ا ب بقسمين مرتين على الصفة المطلوبة ؛ وذلك ما أردنا أن نعمل.

وهذا القسم من الأقسام العملية التي لا تصح أن تتم إلاّ بوجه واحد لأن العدد الواحد ليس له إلاّ خُمس واحد ولا ينقسم أربعة أخماسه بنصفين إلاّ قسمة واحدة ؛ فليس ينقسم العدد على النسبتين المذكورتين إلاّ بوجه واحد.

⟨ح⟩ فأما المثال في القسم العملي الغير محدود من المسائل العددية السيّالة فمثل قولنا : نريد أن نجد عددين مربعين يكون مجموعهما مربعاً.

فنفرض أن ذلك قد وجد وهما عددا ا ج ج ب ، فيكون ا ب مربعاً ، وليكن عدد د ه ضلع مربع ا ب وعدد د ز ضلع مربع ا ج ، فيكون مربع د ه هو عدد ا ب ومربع د ز هو عدد ا ج . فيكون زيادة مربع د ه على مربع د ز هي عدد ج ب وزيادة مربع د ه على مربع د ز هي مربع ه ز وضرب د ز في ز ه مرتين. / فيكون مربع ه ز وضرب د ز في ز ه مرتين مجموعةً عدداً مربعاً، لأنها مساوية لـ ج ب المربع. وإذا نقص من مربع ج ب مربع ه ز كان الباقي هو ضرب د ز في ز ه مرتين. فيكون نصفه هو ضرب د ز في ز ه ، وضرب د ز في ز ه إذا قسم على ه ز خرج من القسمة ز د. فمربع ج ب إذا نقص منه مربع ه ز وأخذ نصف ما بقي وقسم على ه ز ، خرج من القسمة ز د ؛ ثم إذا ضرب ز د في مثله كان من ذلك ا ج ويكون ا ج مع ج ب هو ا ب الذي هو مربع د ه . س - ٣٢٢ -

1 فنقول : فيقول [س] / النسبتين المطلوبتين : النسبة المطلوبة [ب، س] – 6 تصح أن : ناقصة [ب] / تتم : يتم [س] – 8 النسبتين المذكورتين : النسبة المذكورة [ب، س] – 13 هي : هو [ب، س] – 13-14 عدد ... هي : ناقصة [ب] – 14 هي : هو [س] – 17 وضرب د ز في ز ه : ناقصة [ب]

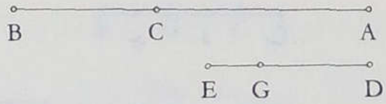


Fig. 11

L'analyse a abouti à supposer un carré, un carré quelconque, duquel on retranche ensuite un carré, un carré quelconque, à condition qu'il soit plus petit que le premier; puis on partage le reste en deux moitiés, on divise ensuite la moitié par le côté du carré retranché, on multiplie le résultat de la division par lui même, puis on ajoute le résultat du produit au premier carré.

Cette notion est possible et n'est pas difficile; ainsi puisque cette notion est possible, si on fait la synthèse de cette analyse, la synthèse aboutit à l'existence de ce que l'on recherche et de plus, la démonstration de la vérité de ce que l'on recherche s'achève.

La synthèse de ce problème se fait de la manière suivante: nous supposons un nombre carré quelconque, soit AC; nous en séparons un carré quelconque soit le carré dont le côté est DG, nous partageons ce qui reste de AC en deux moitiés et nous divisons la moitié par le nombre DG, soit GE, ce qu'on obtient de la division. Nous multiplions GE par lui-même, soit CB ⟨le produit⟩, CB sera donc un carré et CA un carré.

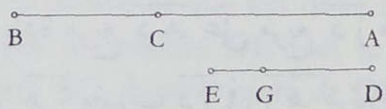
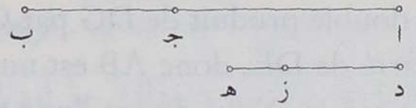


Fig. 12

Je dis que AB qui est la somme des deux carrés est un carré.

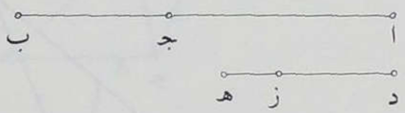
Démonstration: AC est le carré de DG plus le double produit de DG par
B-75^{v} GE, et CB est le carré de / GE, donc AB tout entier est le carré de DG plus le carré de GE plus le double produit de DG par GE. Mais le carré de DG plus



فقد انتهى التحليل إلى أن نفرض مربعاً، أي مربع كان، ثم ننقص منه مربعاً، أي مربع كان، بعد أن يكون أقل منه؛ ثم نقسم الباقي بنصفين، ثم نقسم النصف على ضلع المربع المنقوص، فما خرج من القسمة ضرب في مثله، ثم زيد على ما يخرج من الضرب على المربع الأول.

وهذا المعنى ممكن غير متعذر؛ وإذْ هذا المعنى ممكن، فإن هذا التحليل إذا رُكّب انتهى التركيب إلى وجود المطلوب وتمام البرهان مع ذلك على صحة المطلوب.

وتركيب هذه المسألة يكون على هذه الصفة: نفرض عدداً مربعاً كيفما اتفق وليكن ا جـ، ونفصل منه مربعاً كيفما اتفق وليكن المربع الذي ضلعه د ز، ونقسم ما يبقى من ا جـ بنصفين ونقسم النصف على عدد د ز وليخرج من القسمة ز هـ. ونضرب ز هـ في مثله، وليكن جـ ب، فيكون جـ ب مربعاً وجـ ا مربعاً.



فأقول: إن ا ب الذي هو مجموع المربعين مربعٌ.

برهان ذلك: أن ا جـ هو مربع د ز وضرب د ز في ز هـ مرتين، وجـ ب هو مربع / ز هـ، فمجموع ا ب هو مربع د ز ومربع ز هـ وضرب د ز في ز هـ مرتين. ب - ٧٥ - ظ

لكن مربع د ز ومربع ز هـ وضرب د ز في ز هـ مرتين هو مربع د هـ، فعدد ا ب هو

1 مربعًا: مربع [ب، س] – 2 مربعًا: مربع [ب] – 2-1 ثم ... كان: ناقصة [س] – 4 على (الأولى): ناقصة [س] – 8 نفرض: نفرض على [س] – 10 من: منه [س] – 11 مربعًا (الثانية): مربع [ب] – 12 مربع: مربعا [ب، س] – 13 د ز (الثانية): جـ د [ب] – 15 ز هـ (الأولى): د هـ [ب]

le carré de GE plus le double produit de DG par GE est le carré de DE, donc le nombre AB est le carré de DE, donc AB est un carré, et il est la somme de AC et CB qui sont des carrés. Nous avons donc trouvé deux nombres carrés dont la somme est un carré qui sont les deux nombres AC et CB. Ce qu'il fallait faire.

Ce problème est indéterminé, c'est-à-dire qu'il peut avoir de nombreuses solutions. En effet, si nous supposons à la place du carré AC un autre carré, autre que AC, et si nous faisons ce que nous avons fait pour AC, nous obtenons deux carrés dont la somme est un carré. Ceci se montre comme pour les deux carrés AC et CB. Si nous séparons du carré de AB un carré, autre que le carré AC, c'est-à-dire un carré dont le côté est autre que DG, et si nous faisons ce que nous avons fait pour DG, nous obtenons un carré autre que le carré CB, et la somme de ce carré et du carré AC sera un carré.

C'est selon cet exemple que sont les problèmes numériques pratiques, indéterminés et sans discussion.

Nous avons achevé les parties de l'analyse des problèmes numériques.

⟨9⟩ Quant aux problèmes géométriques, l'exemple dans la partie théorique des problèmes géométriques est comme notre énoncé: la somme de deux côtés d'un triangle est plus grande que le côté restant.

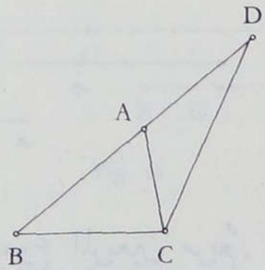


Fig. 13

L'analyse de ce problème est de supposer l'énoncé tel qu'il a été formulé. Donc la somme des deux côtés AB et AC est plus grande que BC. Nous examinons les propriétés du triangle pour dégager une propriété qui mène à cela. Si on examine les propriétés du triangle tel qu'il est, on ne trouve pas une propriété qui mène à la validité de cet énoncé. Il faut donc que l'analyste

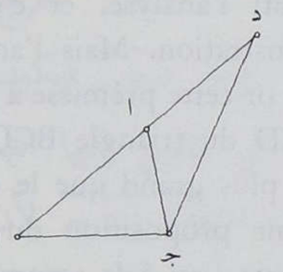
مربع د هـ، فـ ا ب مربع وهو مجموع ا ج جـ ب المربعين؛ فقد وجدنا عددين مربعين مجموعهما مربع وهما عددا ا ج جـ ب؛ وذلك ما أردنا أن نعمل.

وهذه المسألة سيّالة، أعني أنه قد وُجد لها عدة أجوبة، وذلك أنا إن فرضنا مكان ا ج المربع مربعاً آخر غير ا ج وعملنا فيه مثل ما عملنا في ا ج حصل لنا مربعان مجموعهما مربع. ويتبين ذلك كما تبين في مربعي ا ج جـ ب. وإن فصلنا من مربع ا ب مربعاً غير مربع ا ج، أعني مربعاً ضلعه غير د ز وعملنا فيه مثل ما عملنا في د ز، حصل لنا مربع غير مربع جـ ب، ويكون ذلك المربع مع ا ج مجموعين مربعاً.

فعلى هذا المثال تكون المسائل العددية العملية السيّالة الغير محدودة.

فقد استوفينا أقسام تحليل المسائل العددية.

⟨ط⟩ وأما المسائل الهندسية فإن المثال في القسم العلمي من المسائل الهندسية هو قولنا: كل ضلعين من مثلث فهما أعظم من الضلع الباقي.



فتحليل هذا الشكل هو أن نفرض الدعوى على ما ادُّعي فيها. فيكون ضلعا ا ب ا ج مجموعين أعظم من ب ج، فننظر في خواص المثلث ليظهر فيها خاصة تؤدي إلى ذلك. وإذا نظر في خواص المثلث وهو على ما هو عليه لم يوجد فيه خاصة تؤدي إلى صحة هذه الدعوى. فينبغي أن يحدس المحلل على زيادة يزيدها

2 نعمل: نعمله [ب] – 3 وجد: يوجد [س] – 4 آخر: ا حـ [س] / فيه: ناقصة [ب] – 5 ا ب: ا ج [ب، س] – 6 غير ... مربعًا: ناقصة [س] / ا ج: جـ د [ب] – 10 وأما: فاما [س] – 11 هو: فان هو [س] – 13 ا ب: ب ا [س] – 14-15 ذلك ... تؤدي إلى: مكررة [س] – 15 يزيدها: زيدها [س]

ait l'intuition d'un ajout qu'il ajoute à cette proposition pour engendrer une propriété ou des propriétés qui ne se trouvent pas dans ce triangle tel qu'il est. L'un de ces ajouts que l'on peut ajouter pour engendrer une propriété supplémentaire est de poser les deux côtés en une seule ligne; nous prolongeons BA et nous en séparons ⟨une droite⟩ égale à AC, soit AD. On a donc BD plus grand que BC. Joignons CD, il vient le triangle BDC dont le côté DB est plus grand que le côté BC. Or il a été montré dans la dix-huitième proposition du premier livre de l'ouvrage d'Euclide que le plus grand côté de tout triangle est intercepté par le plus grand angle, l'angle BCD est donc plus grand que l'angle BDC. Mais l'angle BDC est égal à l'angle ACD puisque AD est égal à AC. L'angle BCD est donc plus grand que l'angle ACD, la chose est en effet ainsi.

L'analyse a abouti à une notion donnée qui ne comporte aucun doute, c'est-à-dire l'angle BCD est plus grand que l'angle ACD.

La synthèse de cette analyse se fera comme nous allons le décrire: prolongeons BA, comme il a été fait dans l'analyse, séparons AD égal à AC et joignons DC. L'angle BCD est donc plus grand que l'angle ACD, c'est la prémisse à laquelle a abouti l'analyse, et c'est celle que l'on pose au commencement de la démonstration. Mais l'angle ACD est égal à l'angle ADC, car AC est égal à AD; or cette prémisse a été montrée avant la dernière
S-323r prémisse, donc / l'angle BCD du triangle BCD est plus grand que l'angle BDC. Le côté BD est alors plus grand que le côté BC d'après ce qui a été montré dans la dix-neuvième proposition du premier livre de l'ouvrage d'Euclide. Mais le côté BD est égal à la somme des deux côtés BA et AC, donc la somme des deux côtés BA et AC est plus grande que le côté BC. Ce qu'il fallait démontrer.

On peut analyser cette proposition d'une autre manière, c'est-à-dire qu'on ajoute un ajout autre que le précédent[19]. Parmi les ajouts possibles dans cette

19. Littéralement: un ajout autre que l'ajout qui a été ajouté dans cette manière.

في هذا الشكل ليحدث بها خاصة أو خواص ليست موجودة في هذا المثلث وهو على ما هو عليه. وإحدى الزيادات التي يحتمل أن تزاد لتحدث بها خاصة زائدة هي أن نجعل الضلعين خطاً واحداً، فنخرج ب ا على استقامة ونفصل منه مثل ا ج وليكن ا د. فيكون ب د أعظم من ب ج، ونصل ج د فيصير ب د ج مثلثاً ويكون ضلع د ب منه أعظم من ضلع ب ج. وقد تبيّن في الشكل الثامن عشر من المقالة الأولى من كتاب أقليدس أن الضلع الأعظم من كل مثلث يوتر الزاوية العظمى، فيكون زاوية ب ج د أعظم من زاوية ب د ج. لكن زاوية ب د ج هي مثل زاوية ا ج د لأن ا د مثل ا ج. فيكون زاوية ب ج د أعظم من زاوية ا ج د، لكن الأمر كذلك.

فقد انتهى التحليل إلى معنى هو معطى لا شك فيه وهو أن زاوية ب ج د أعظم من زاوية ا ج د.

وتركيب هذا التحليل يكون كما نصف: نخرج ب ا على استقامة كما فعل في التحليل ونفصل ا د مثل ا ج ونصل د ج. فيكون زاوية ب ج د أعظم من زاوية ا ج د، وهذه المقدمة هي التي انتهى إليها التحليل وهي التي تُجعل أوّلة في البرهان. وزاوية ا ج د مساوية لزاوية ا د ج لأن ا ج مثل ا د، وهذه المقدمة هي التي تبينت قبل المقدمة الأخيرة، فيكون / زاوية ب ج د من مثلث ب ج د أعظم من زاوية ب د ج. فيكون ضلع ب د أعظم من ضلع ب ج، كما تبين في الشكل التاسع عشر من المقالة الأولى من كتاب أقليدس. وضلع ب د هو مثل ضلعي ب ا ا ج فضلعا ب ا ا ج أعظم من ضلع ب ج، وذلك ما أردنا أن نبيّن. س - ٣٢٣ -

وقد يمكن أن يحلل هذا الشكل بوجه آخر غير هذا الوجه، وهو أن يُزاد فيه زيادة غير الزيادة التي زيدت في هذا الوجه. فمن الزيادات التي يمكن أن تزاد في

2 وإحدى: واحد [ب] فاحد [س] / تزاد: يزاد [س] / لتحدث: لحدث [س] / بها: ناقصة [ب] – 3 هي: هو [ب، س] – 4 ب د ج: ب د ح [ب] – 10 هو: ناقصة [س] / ب ج د: ب د ج [س]، كتب ناسخ [ب] بعدها «إلى معنى هو معطى» – 12 هذا التحليل: هذه المسألة [ب] – 14 وهذه: وهي [س] – 15 ا د ج: ا د ح [ب] / ا ج: ا ح [ب] / ا د [س] / ا د: ا ج [س] – 16 من مثلث ب ج د: ناقصة [ب] – 17 كما: لما [ب]

proposition, on pose BD égal à AB. Puisque si BC n'était pas plus grand que BA, la somme de BA et AC serait plus grande que BC, nous nous dispensons de la démonstration.

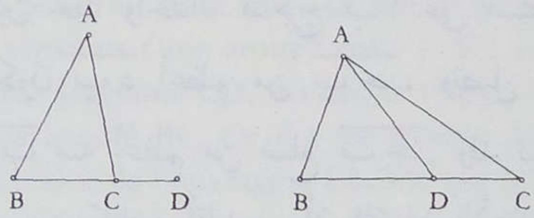


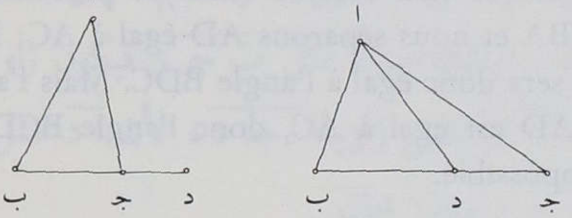
Fig. 14

Si BC est plus grand que BA, il reste AC plus grand que CD, l'angle ADC est donc plus grand que CAD. Mais il est ainsi car il est obtus; en effet l'angle BDA est égal à l'angle BAD, car le côté BA est égal au côté BD et la somme de deux angles d'un triangle est plus petite que deux droits, l'angle BDA est donc plus petit qu'un droit, l'angle ADC est donc plus grand qu'un droit, il est donc plus grand que l'angle DAC. L'analyse a donc abouti à une prémisse donnée: l'angle ADC est plus grand que l'angle DAC et le côté BA est égal au côté BD.

La synthèse de cette analyse se fera de la manière suivante: supposons le triangle, séparons BD égal à BA et joignons AD; l'angle BAD est donc égal à l'angle BDA et leur somme est plus petite que deux droits. L'angle BDA est donc plus petit qu'un droit, l'angle ADC est donc plus grand qu'un droit. Mais la somme des deux angles ADC et DAC est plus petite que deux droits,
B-76r donc l'angle ADC est plus grand que l'angle DAC,/ le côté AC est donc plus grand que le côté CD. Mais le côté AB est égal au côté BD, donc la somme des deux côtés BA et AC est plus grande que le côté BC. Ce qu'il fallait démontrer.

On peut analyser cette proposition de manières autres que ces deux-là, mais il suffit de ces deux manières pour le but que nous nous sommes fixés, c'est-à-dire de montrer par ces deux manières, parmi les propositions géométriques, celles qui peuvent être analysées de plusieurs manières.

هذا الشكل هو أن نجعل ب د مثل ا ب ؛ لأنه إن كان ب ج ليس بأعظم من ب ا كان مجموع ب ا ا ج أعظم من ب ج ، ونستغني عن البرهان.



⟨فإن كان ب ج أعظم من ب ا⟩ فيبقى ا ج أعظم من ج د ، فيكون زاوية ا د ج أعظم من زاوية ج ا د. لكنها كذلك لأنها منفرجة ، وذلك أن زاوية ب د ا مثل زاوية ب ا د لأن ضلع ب ا مثل ضلع ب د ، وكل زاويتين من مثلث فهما أصغر من قائمتين، فزاوية ب د ا أصغر من قائمة، فزاوية ا د ج أعظم من قائمة ، فهي أعظم من زاوية د ا ج. فقد انتهى التحليل إلى مقدمة معطاة وهي أن زاوية ا د ج أعظم من زاوية د ا ج وضلع ب ا مثل ضلع ب د.

وتركيب هذا التحليل يكون على هذه الصفة : نفرض المثلث ونفصل ب د مثل ب ا ونصل ا د ، فيكون زاوية ب ا د مثل زاوية ب د ا ، ومجموعهما أصغر من قائمتين. فزاوية ب د ا أقل من قائمة ، فزاوية ا د ج أعظم من قائمة. وزاويتا ا د ج د ا ج أقل من قائمتين، فزاوية ا د ج أعظم من زاوية د ا ج ، / فضلع ا ج أعظم من ضلع ج د. وضلع ا ب مثل ضلع ب د ، فضلعا ب ا ا ج أعظم من ضلع ب ج ؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن. ب - ٧٦ - و

وقد يمكن أن يحلل هذا الشكل بوجوه أخر غير هذين الوجهين ولكن في هذين الوجهين كفاية فيما قصدنا له وهو : أنه قد نبيّن بهذين الوجهين من الأشكال الهندسية ما يمكن أن يحلل بعدة وجوه.

2-1 لأنه ... البرهان : ناقصة [س] – ليس هذا الشكل في المخطوطتين – 7 وهي : فهي [س] – 13 مثل : مكررة [س] – 15 هذا : ناقصة [ب] – 16 الوجهين (الثانية) : الوجهين ان [س]

⟨10⟩ L'analyse qui mène à l'impossible dans la partie théorique des problèmes géométriques est à l'exemple de notre énoncé dans cette proposition: la somme de deux côtés d'un triangle est égale au troisième côté.

L'analyse de ce cas se fera comme l'analyse précédente, c'est-à-dire que nous prolongeons BA et nous séparons AD égal à AC; BD sera donc égal à BC et l'angle BCD sera donc égal à l'angle BDC. Mais l'angle BDC est égal à l'angle ACD, car AD est égal à AC, donc l'angle BCD sera égal à l'angle ACD, ce qui est impossible.

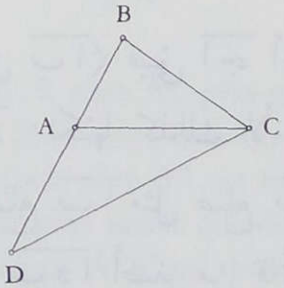


Fig. 15

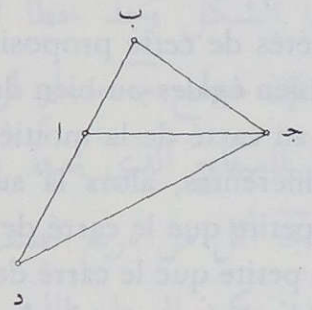
Comme l'analyse a mené à l'impossible, l'énoncé est faux. La démonstration de sa fausseté est cette même analyse, si on la considère comme une démonstration par l'absurde. En effet, si on suppose l'énoncé tel qu'il a été formulé, c'est-à-dire que la somme de deux côtés d'un triangle est égale au côté qui reste et si on mène la démonstration à l'aide de prémisses qui ont été montrées par l'analyse, alors le syllogisme sera démonstatif et il s'ensuit nécessairement l'impossible qui s'ensuivait dans l'analyse.

C'est suivant cet exemple que se fera l'analyse de problèmes géométriques théoriques qui mènent à l'impossible et c'est suivant cette démonstration, qui est par l'absurde et engendrée par cette analyse que se fera la démonstration de la fausseté de l'énoncé.

⟨11⟩ Quant à l'exemple dans la partie pratique avec discussion des problèmes géométriques, tel est notre énoncé: diviser une droite donnée en deux parties telles que la surface entourée par les deux parties soit égale à une surface donnée.

⟨ي⟩ فأما التحليل الذي يؤدي إلى المحال في القسم العلمي من المسائل الهندسية، فمثل قولنا في هذا الشكل: إن كل ضلعين من مثلث فهما مساويان للضلع الباقي.

وتحليل ذلك يكون على مثل التحليل الذي تقدم، وهو أن نخرج ب ا على استقامة، ونفصل ا د مثل ا جـ، فيكون ب د مثل ب جـ، فيكون زاوية ب جـ د مثل زاوية ب د جـ. وزاوية ب د جـ مثل زاوية ا جـ د، لأن ا د مثل ا جـ، فيكون زاوية ب جـ د مثل زاوية ا جـ د وهذا محال.



وإذْ قد تأدى التحليل إلى المحال فإن الدعوى باطلة، والبرهان على بطلانها هو هذا التحليل بعينه إذا جُعل برهاناً بالخلف. وذلك أنه إذا فرضت الدعوى على ما ادُّعي فيها، وهو أن ضلعي المثلث مساويان بمجموعهما للضلع الباقي، وسيق البرهان بالمقدمات التي تبينت بالتحليل، فإن القياس يكون برهاناً ويلزم منه محال هو المحال الذي لزم في التحليل.

فعلى هذا المثال يكون تحليل المسائل الهندسية العلمية التي تؤدي إلى المحال، وعلى مثل هذا البرهان الذي بالخلف الذي تولد من هذا التحليل يكون البرهان على بطلان الدعوى.

⟨يا⟩ فأما المثال في القسم العملي المحدود من المسائل الهندسية فمثل قولنا: نريد أن نقسم خطاً مستقيماً مفروضاً بقسمين يكون السطح الذي يحيط به القسمان مساوياً لسطح مفروض.

5-6 لأن ... ا جـ د: ناقصة [س] – ليس الشكل في المخطوطتين – 8 أنه: ناقصة [س] – 9 وسيق: ونسيق [ب] – 10 محال: محالاً [ب، س] – 12 العلمية: العلية [س] – 13 هذا (الأولى): ناقصة [س] – 15 العملي: العمل [س]

Soient la droite AB et la surface C; supposons que la droite a été divisée au
S. 323v point D et que la surface entourée / par les deux droites AD et DB soit égale à la surface C.

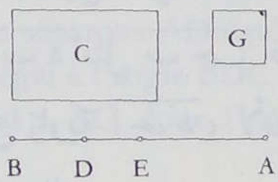
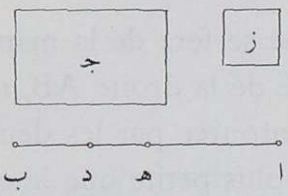


Fig. 16

Si on examine les propriétés de cette proposition, on trouve que les deux droites AD et DB sont ou bien égales ou bien différentes. Si elles sont égales, alors la surface C est égale au carré de la moitié de la droite AB. Si les deux droites AD et DB sont différentes, alors la surface entourée par les deux droites AD et DB est plus petite que le carré de la moitié de la droite ⟨AB⟩. La surface C sera donc plus petite que le carré de la moitié de la droite qui est AB. Mais il n'est pas possible de partager la droite AB en deux parties telles que la surface qu'elles entourent soit plus grande que le carré de la moitié de la droite. Si donc la surface C est égale au carré de la moitié de la droite AB, l'analyse aboutit à ce que la droite AB a été partagée en deux moitiés et ceci est possible. Si la surface C est plus petite que le carré de la moitié de la droite, que l'excédent du carré de la moitié de la droite sur la surface C soit la surface G. Partageons AB en deux moitiés au point E. La surface G sera égale au carré de DE car le carré de EB est égal au produit de AD par DB plus le carré de DE, et le carré de EB est égal à la somme des deux surfaces C et G et le produit de AD par DB est égal à la surface C. Le carré de DE est donc égal à la surface G et le carré de EB est connu, donc la somme des deux surfaces C et G est connue et la surface C est connue, donc la surface G est connue, car si on retranche d'une grandeur connue une grandeur connue, le reste est ⟨une grandeur⟩ connue comme il a été montré dans la quatrième proposition des *Données*. Mais la surface G est égale au carré de ED, donc le carré de ED est connu, la droite ED est donc connue; mais la droite EB est connue et le point E est connu, le point D est donc connu.

فليكن الخط اب والسطح جـ، ولنفرض الخط قد انقسم على نقطة د وصار السطح الذي يحيط / به خطا اد دب مساوياً لسطح جـ. س - ٣٢٣ - ظ



فإذا نظر في خواص هذا الشكل وُجد خطا اد دب، إما متساويين وإما مختلفين. فإن كانا متساويين فإن سطح جـ مساوٍ لمربع نصف خط اب. وإن كان خطا اد دب مختلفين، فإن السطح الذي يحيط به خطا اد دب أقل من مربع نصف الخط، فيكون سطح جـ أقل من مربع نصف الخط الذي هو اب. وليس يمكن أن نقسم خط اب بقسمين يكون السطح الذي يحيطان به أعظمَ من مربع نصف الخط. فإن كان سطح جـ مثل مربع نصف خط اب، فقد انتهى التحليل إلى أن خط اب قد انقسم بنصفين، وذلك ممكن. وإن كان سطح جـ أصغر من مربع نصف الخط، فليكن زيادة مربع نصف الخط على سطح جـ هي سطح ز. ونقسم اب بنصفين على نقطة هـ، فيكون سطح ز مثل مربع د هـ لأن مربع هـ ب مثل سطح اد في دب مع مربع د هـ، ومربع هـ ب مثل سطحي جـ ز وسطح اد في دب مثل سطح جـ؛ فيكون مربع د هـ مثل سطح ز. ومربع هـ ب معلوم، فسطحا جـ ز مجموعهما معلوم، وسطح جـ معلوم، فسطح ز معلوم، لأنه إذا نقص من مقدارٍ معلوم مقدارٌ معلوم كان الباقي معلوماً، كما تبيّن في الشكل الرابع من المعطيات. وسطح ز هو مثل مربع هـ د، فمربع هـ د معلوم، فخط هـ د معلوم؛ وخط هـ ب معلوم، ونقطة هـ معلومة، فنقطة د معلومة.

1 الخط (الأولى) : ناقصة [س] – 2 به ... دب : ناقصة [س] – 3 متساويين : متساويان [س] / وإما : ناقصة [س] – 4 مختلفين : مختلفان [س] – 6 الخط الذي هو اب : خط اب [س] – 10 هي : هو [ب، س] / ز : د [ب] – 11 نقطة : خط [س] / لأن : و [ب] – 11-12 سطح اد ... هـ ب مثل : ناقصة [ب] – 12 سطحي : سطح [س] – 14 ز : د [ب]

L'analyse a abouti à ce que la droite AB est divisée en un point connu qui est le point D et que ED est connue; or si ED est connue, on peut la trouver.

De plus, il a été montré dans l'analyse que la surface C n'est pas plus grande que le carré de la moitié de la droite AB.

La synthèse de ce problème se fera de la manière suivante: si la surface C est égale au carré de la moitié de la droite AB, nous partageons la droite AB en deux moitiés; la surface entourée par les deux moitiés est donc égale à la surface C. Si la surface C est plus petite que le carré de la moitié de la droite AB, nous partageons la droite AB en deux moitiés au point E et nous retranchons du carré de EB la surface C, il reste la surface G. Nous posons le carré de ED égal à la surface G, la surface entourée par les deux droites AD et DB sera égale à la surface C, car la surface entourée par les deux droites AD et DB plus le carré de DE est égale au carré de EB, donc le carré de DE est l'excédent du carré de EB sur la surface entourée par les deux droites AD et DB. Mais la surface G est l'excédent du carré de EB sur la surface C, donc la surface entourée par les deux droites AD et DB est égale à la surface C. Nous avons donc partager la droite AB en deux moitiés au point E de sorte que la surface entourée par les deux droites AD et DB soit égale à la surface C. Ce qu'il fallait faire.

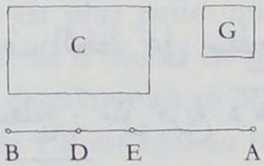


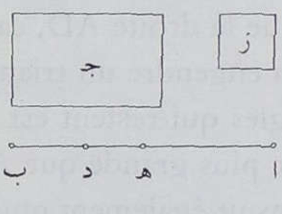
Fig. 17

B. 76v Il / reste donc à montrer que si la surface C est plus grande que le carré de la moitié de la droite AB, alors il n'est pas possible de partager la droite AB en deux parties telles que la surface entourée par ces deux parties soit égale à la surface C, ce qui est une démonstration de la discussion. En effet, si la droite AB est divisée en deux parties, alors la division est ou bien au milieu de la droite, ou bien les deux parties sont différentes. Si la division est au milieu

فقد انتهى التحليل إلى أن خط ا ب مقسوم على نقطة معلومة وهي نقطة د، وأن ه د معلوم، وإذا كان ه د معلوماً فقد يمكن أن يوجد.

ومع ذلك فقد تبين في التحليل أن سطح ج ليس بأعظم من مربع نصف خط ا ب.

وتركيب هذه المسألة على هذه الصفة : إن كان سطح ج مثل مربع نصف خط ا ب، قسمنا خط ا ب بنصفين، فكان السطح الذي يحيط به النصفان مثل سطح ج، وإن كان سطح ج أصغر من مربع نصف خط ا ب، قسمنا خط ا ب بنصفين على نقطة ه، ونقصنا من مربع ه ب سطح ج، وليبق سطح ز. ونجعل مربع ه د مثل سطح ز فيكون السطح الذي يحيط به خطا ا د د ب مثل سطح ج، لأن السطح الذي يحيط به خطا ا د د ب مع مربع د ه مثل مربع ه ب، فمربع د ه هو زيادة مربع ه ب على السطح الذي يحيط به خطا ا د د ب. وسطح ز هو زيادة مربع ه ب على سطح ج، فالسطح الذي يحيط به خطا ا د د ب مساوٍ لسطح ج. فقد قسمنا خط ا ب بنصفين على نقطة ه حتى صار السطح الذي يحيط به خطا ا د د ب مساوياً لسطح ج، وذلك ما أردنا أن نبيّن.



فقد / بقي أن نبيّن أنه إذا كان سطح ج أعظم من مربع نصف خط ا ب، فإنه لا يمكن أن نقسم خط ا ب بقسمين يكون السطح الذي يحيط به القسمان مساوياً لسطح ج، وهو برهان التحديد. وذلك أن خط ا ب إن انقسم بقسمين فإن القسمة إما أن تكون على نصف الخط وإما أن يكون القسمان مختلفين. فإن كانت القسمة على نصف ب – ٧٦ – ظ

2 وإذا : فاذا [س] – 6 فكان : وكان [ب] – 8 ز : د [ب] – 12 ج (الأولى) : ناقصة [س] / مساو: كتبها ناسخ [ب] «مساوى» ولن نشير إلى مثلها فيما بعد – 13 ه : ز [س] – 12-15 قسمنا ... بقي : ناقصة [ب] – 16 مساويًا : مساو [س] – 18 تكون : يكون [س]

de la droite, alors la surface entourée par les deux parties est égale au carré de la moitié de la droite. Si les deux parties sont différentes, alors la surface entourée par les deux parties est plus petite que le carré de la moitié de la droite. Pour toute division par laquelle la droite AB se divise en deux parties, la surface entourée par les deux parties n'est donc pas plus grande que le carré de la moitié de la droite. Si donc la surface C est plus grande que le carré de la moitié de la droite, alors la droite ne se divise pas en deux parties qui entourent une surface égale à la surface C.

⟨12⟩ Et tel est notre énoncé: mener, d'un point connu à une droite connue et illimitée, une droite qui lui est perpendiculaire.

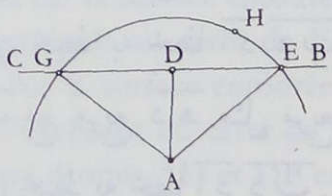
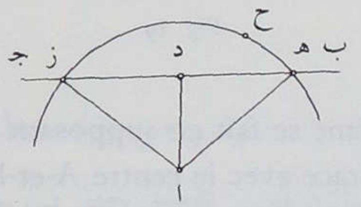


Fig. 18

Soient A le point et BC la droite, nous voulons mener du point A à BC une droite qui lui soit perpendiculaire. Nous supposons que ceci est fait et que la perpendiculaire est AD. Si l'analyste examine la propriété de cette droite, il lui apparaît que toute droite menée du point A à la droite BC, à l'exception de la droite AD, sera plus grande que la droite AD, car si on mène du point A à la droite BC une autre droite, on engendre un triangle tel que l'un de ses angles est droit, chacun des deux angles qui restent est donc aigu. Menons la droite AE quelconque, AE sera donc plus grande que AD, car l'angle ADE est plus grand que l'angle AED. Il s'ensuit également que si on fait la droite DG égale à la droite DE et si on joint AG, alors AG sera égale à AE et GE sera divisée en deux moitiés par AD. Il s'ensuit que / si on mène du point A à la droite
S. 324r BC, deux droites égales, si on divise la droite qui est entre elles en deux moitiés, et si on joint le point de division et le point A par une droite, alors

الخط، كان السطح الذي يحيط به القسمان مساوياً لمربع نصف الخط. وإن كان القسمان مختلفين فإن السطح الذي يحيط به القسمان أصغر من مربع نصف الخط. فكل قسمة ينقسم بها خط اب بقسمين، فإن السطح الذي يحيط به القسمان ليس بأعظم من مربع نصف الخط. فإذا كان سطح ج أعظم من مربع نصف الخط، فليس ينقسم الخط بقسمين يحيطان بسطح مساوٍ لسطح ج.

〈يب〉 ومثل قولنا : نريد أن نخرج من نقطة معلومة إلى خط مستقيم معلوم غير متناه خطاً يكون عموداً عليه.



فليكن النقطة آ والخط ب ج، ونريد أن نخرج من نقطة ا خطاً إلى ب ج يكون عموداً عليه. فنفرض أن ذلك قد كان، وهو عمود ا د. فإذا نظر المحلل في خاصة هذا الخط، ظهر له أن كل خط يخرج من نقطة آ إلى خط ب ج سوى خط آ د يكون أعظم من خط آ د، لأنه إذا خرج من نقطة آ خط آخر إلى خط ب ج حدث مثلث يكون زاوية منه قائمة، فيكون كل واحدة من الزاويتين الباقيتين حادة. ونخرج خط ا ه كيفما اتفق، فيكون ا ه أعظم من آ د لأن زاوية ا د ه أعظم من زاوية ا ه د. ويلزم أيضاً أنه إذا جعل خط د ز مثل خط د ه ووصل ا ز، كان ا ز مثل ا ه وكان ا د قد قسم ز ه بنصفين. فيلزم من ذلك أنه / إذا خرج من نقطة ا إلى خط ب ج خطان متساويان، وقسم الخط الذي فيما بينهما بنصفين، ووصل بين موضع القسمة وبين نقطة س – ٣٢٤ – و

3 فكل : وكل [س] – 9 ا د : آ و [س] – 10 آ : ناقصة [ب] – 11-12 حدث مثلث يكون : يكون قد حدث مثلث [ب] – 14 أنه : ناقصة [ب] – 15 إذا خرج : ان اخرج [س] – 16 فيما : ناقصة [ب] / موضع : موضعي [ب]

cette droite qui les joint est perpendiculaire à la droite BC. Mais si AG et AE sont égales, alors le cercle dont le centre est le point A et le rayon la droite AE, coupe la droite BC aux deux points G et E tels qu'une portion de ce cercle soit au-delà de la droite BC.

L'analyse a donc abouti à une chose possible, c'est-à-dire: tracer avec le centre A un cercle coupé par la droite BC.

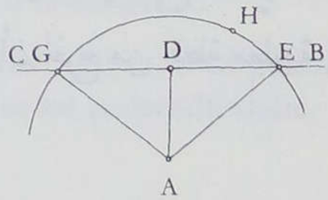


Fig. 19

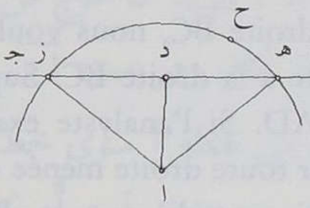
La synthèse de ce problème se fait en supposant au-delà de la droite BC un point, soit le point H; on trace avec le centre A et la distance AH un cercle, il coupe la droite BC en deux points, qu'elle le coupe aux points E et G, que l'on joigne AE et AG et qu'on partage EG en deux moitiés au point D et qu'on joigne AD. Les deux droites ED et DA sont égales aux deux droites GD et DA et la base AE est égale à la base AG, donc l'angle ADE est égal à l'angle ADG, ils sont donc droits, donc la droite AD est perpendiculaire à la droite BC. Ce qu'il fallait démontrer.

Il est clair qu'il n'est possible de mener du point A à la droite BC qu'une seule perpendiculaire, car si on mène du point A à la droite BC deux perpendiculaires, il s'engendre un triangle dont deux angles sont droits, ce qui est impossible.

⟨13⟩ Quant à l'exemple dans la partie pratique sans discussion qui a lieu d'une seule manière, tel est notre énoncé: mener d'un point donné sur une droite connue une droite qui lui est perpendiculaire.

ا بخط مستقيم، كان ذلك الخط الموصول عموداً على خط ب ج. وإذا كان ا ز ا ه متساويين، كانت الدائرة التي مركزها نقطة ا ونصف قطرها خط ا ه تقطع خط ب ج على نقطتي ز ه، ويكون قطعة من الدائرة من وراء خط ب ج.

فقد انتهى التحليل إلى أمر ممكن: وهو أن نرسم على مركز ا دائرة يقطعها خط ب ج.



وتركيب هذه المسألة يكون بأن نفرض من وراء خط ب ج نقطة مثل نقطة ح، ويُدار على مركز ا وببعد ا ح دائرة فهي تقطع خط ب ج على نقطتين؛ فلتقطعها على نقطتي ه ز، ويوصل ا ه ا ز ويقسم ه ز بنصفين على نقطة د ويوصل ا د. فيكون خطا ه د د ا مثل خطي ز د د ا وقاعدة ا ه مثل قاعدة ا ز، فزاوية ا د ه مثل زاوية ا د ز فهما قائمتان، فخط ا د عمود على خط ب ج؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

وهو بيّنٌ أنه لا يمكن أن يخرج من نقطة ا إلى خط ب ج عمود إلاّ عمود واحد، لأنه إن خرج من نقطة ا إلى خط ب ج عمودان، حدث مثلث زاويتان منه قائمتان، وهذا محال.

〈يـج〉 فأما المثال في القسم العملي الغير محدود الذي يقع بوجه واحد فمثل قولنا: نريد أن نخرج من نقطة مفروضة على خط مستقيم معلوم خطاً يكون عموداً عليه.

2 تقطع : يقطع [ب] – 3 ز : د [ب] – 4 خط : ناقصة [س] – 7 تقطع : يقطع [س] – 8 ا ز : ه ز [س] – 10 ذلك : ناقصة [س].

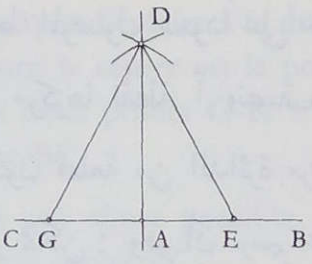


Fig. 20

Que le point soit A et la droite BC, nous voulons mener du point A une droite qui soit perpendiculaire à la droite BC. Supposons que ceci est fait et que la perpendiculaire soit AD. Si l'analyste examine la propriété de cette droite, il lui apparaît que pour toute droite menée du point A, à l'exception de la droite AD, les angles qui sont de part et d'autre de cette droite sont différents, et qu'on ne peut mener du point A qu'une seule droite telle que les angles de part et d'autre ⟨de cette droite⟩ soient égaux. Il apparaît ensuite que si on mène du point D deux droites à deux points de la droite BC de part et d'autre du point A, telles que leur distance du point A soit égale, alors elles seront égales. Le triangle engendré est donc isocèle et le point A est le milieu
B. 77^{r} de sa base. Qu'il soit le triangle DEG, tel que EA soit égale à / AG. L'analyse a donc abouti à une chose possible, c'est-à-dire: construire sur une portion de la droite BC, un triangle isocèle tel que le point A partage sa base en deux moitiés et ceci est une chose possible.

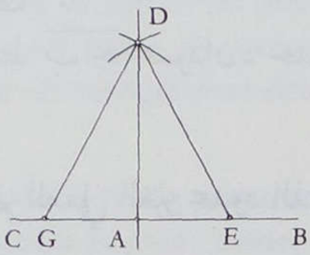
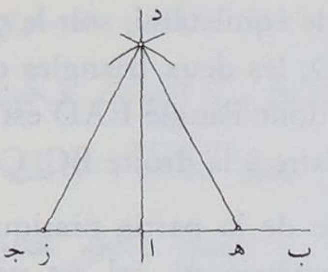
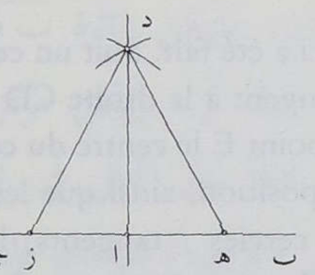


Fig. 21

La synthèse de ce problème: séparons de la droite BC de part et d'autre du point A deux droites égales, comme les deux droites AE et AG. Construisons



فليكن النقطة آ والخط ب ج، ونريد أن نخرج من نقطة آ خطاً يكون عموداً على خط ب ج. فنفرض أن ذلك قد كان وهو عمود آ د. فإذا نظر المحلل في خاصة هذا الخط ظهر له أن كل خط يخرج من نقطة آ سوى خط آ د يكون الزاويتان اللتان عن جنبتيه مختلفتين، وأنه ليس يخرج من نقطة آ خطٌّ يكون الزاويتان اللتان عن جنبتيه متساويتين سوى خط واحد. ثم يظهر أنه إذا خرج من نقطة دَ خطان إلى نقطتين من خط ب ج عن جنبتي نقطة آ يكون بعداهما عن نقطة آ بعدين متساويين، فإنهما يكونان متساويين. فيكون المثلث الذي يحدث متساوي الساقين، ويكون نقطة آ هي وسط قاعدته، وليكن ذلك مثل مثلث د ه ز ويكون ه آ مثل / آ ز. فقد انتهى ب - ٧٧ - و التحليل إلى أمر ممكن: وهو أن نعمل على قطعة من خط ب ج مثلثاً متساوي الساقين يكون نقطة آ تقسم قاعدته بنصفين، وهذا أمر ممكن.



وتركيب هذه المسألة هو أن نفصل من خط ب ج عن جنبتي نقطة آ خطين متساويين مثل خطي آ ه آ ز. ونعمل على خط ه ز مثلثاً متساوي الأضلاع،

1-2 ونريد ... ب ج : ناقصة [س] – 4 خط : خطا [ب] – 6 ب ج : ب ح [ب] – 8 وليكن : فليكن [س] / مثلث : مثل [س]

sur la droite EG un triangle équilatéral, soit le triangle EDG, ce triangle sera donc isocèle. Joignons AD, les deux triangles qui sont de part et d'autre de AD ont des angles égaux, donc l'angle EAD est égal à l'angle GAD, la droite AD sera donc perpendiculaire à la droite BC. Ce qu'il fallait démontrer.

⟨14⟩ Quant à l'exemple de la partie pratique sans discussion et indéterminée des problèmes géométriques, tel est notre énoncé : un cercle étant donné, et une droite illimitée à l'extérieur de ce cercle étant donnée, comment construire un cercle tangent au cercle donné et tangent à la droite en même temps.

Soient le cercle AB et la droite CD, nous voulons tracer un cercle tangent au cercle AB et tangent à la droite CD.

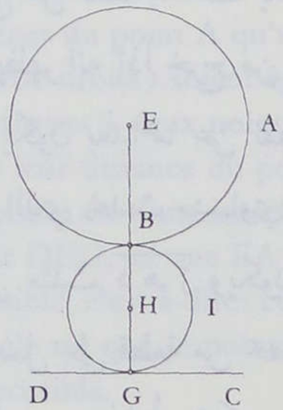


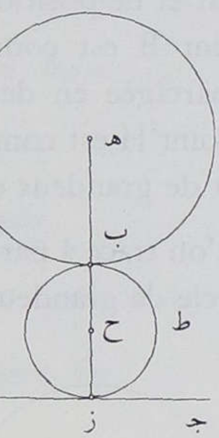
Fig. 22

Nous supposons que ceci a été fait. Soit un cercle BIG, qu'il soit tangent au cercle AB au point B et tangent à la droite CD au point G ; soient le point H le centre de ce cercle et le point E le centre du cercle AB. Si l'analyste examine les propriétés de cette proposition, ainsi que les propriétés du cercle tangent, S. 324v il trouve que pour deux cercles / tangents, la droite qui joint leurs deux centres passe par le point de contact comme il a été montré dans le troisième livre de l'ouvrage d'Euclide. Joignons les deux points E et H, la droite EH passe donc par le point B. S'il examine également la propriété du cercle

وليكن مثلث هـ د ز، فيكون هذا المثلث متساوي الساقين. ونصل آ د، فيكون المثلثان اللذان عن جنبتيه متساويي الزوايا، فيكون زاوية هـ ا د مثل زاوية ز ا د، فيكون خط ا د عموداً على خط ب ج؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

⟨يد⟩ فأما المثال في القسم العملي ⟨الغير محدود⟩ السيّال من المسائل الهندسية فمثل قولنا: إذا كانت دائرة مفروضة وخط مستقيم مفروض غير متناه خارجاً عن الدائرة، كيف نعمل دائرة تماس الدائرة المفروضة وتماس الخط المستقيم معاً.

فليكن الدائرة ا ب والخط المستقيم ج د ونريد أن نرسم دائرة تماس دائرة ا ب وتماس خط ج د.



فنفرض أن ذلك قد كان، وليكن دائرة ب ط ز وتماس دائرة ا ب على نقطة ب وتماس خط ج د على نقطة ز، وليكن مركز هذه الدائرة ⟨نقطة⟩ ح وليكن مركز دائرة ا ب نقطة هـ. فإذا نظر المحلل في خواص هذا الشكل وفي خواص الدائرة المماسة، وجد أن كل دائرتين / تتماسان فإن الخط الذي يصل بين مركزيهما س - ٣٢٤ - يمرّ بنقطة التماس، كما تبيّن في المقالة الثالثة من كتاب أقليدس. فنصل بين نقطتي هـ ح، فخط هـ ح [فهو] يمرّ بنقطة ب. وإذا نظر أيضاً في خاصة الدائرة المماسة

1 مثلث: مثل [ب] – 2 متساويي: متساويتين [س] – 4 فأما: واما [س] – 6 نعمل: يعمل [س] / ماس (الثانية): ناقصة [س] – 9 ب ط ز: ناقصة [ب] – 10 ز: د [ب] – 10-11 ح ... ا ب: ناقصة [ب] – 12 تماسان: يتماسان [ب]

tangent à une droite, il trouve que la droite menée du centre du cercle au point de contact est perpendiculaire à la droite tangente. On joint la droite HG perpendiculaire à la droite CD. Mais la droite HG est ou bien en continuité avec la droite EH ou bien n'est pas en continuité avec elle. Si les deux droites EH et HG sont en continuité, comme dans le premier cas de figure, alors la droite EG est une droite et elle est perpendiculaire à la droite CD. Mais le point E est connu, car il est le centre du cercle connu, et la droite CD est de position connue par hypothèse puisqu'elle a été donnée. Or, on a mené du point E connu à la droite CD de position connue la droite EG qui a entouré avec elle un angle connu. La droite EG est donc de position connue, comme il a été montré dans la proposition 29 des *Données*. Mais la droite CD est de position connue, donc le point G est connu comme il a été montré dans la proposition 24 des *Données*. Les deux points E et G sont donc connus, la droite EG est alors de grandeur et de position connues et le cercle AB est de position connue, donc le point B est connu. La droite BG est alors de grandeur connue et elle est partagée en deux moitiés au point H puisque BHG est une droite, donc le point H est connu, la droite HB est de grandeur connue, donc le cercle BIG est de grandeur et de position connues.

L'analyse a abouti à ce que l'on trace à partir d'un point connu de la droite EG de position connue un cercle de grandeur connue; ceci est possible.

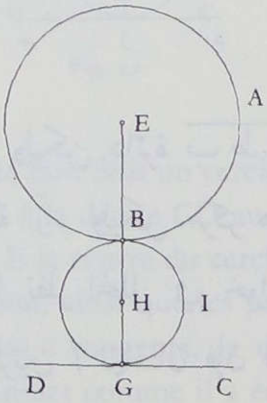
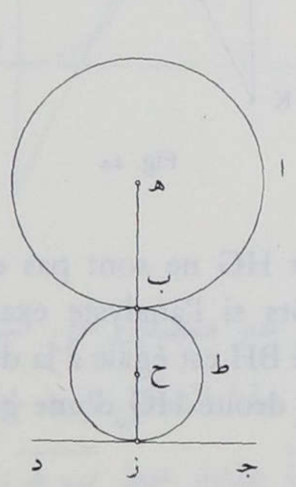


Fig. 23

للخط المستقيم وجد أن الخط المستقيم الذي يخرج من مركز الدائرة إلى موضع التماس يكون عموداً على الخط المماس. فيصل خط ح ز، فيكون خط ح ز عموداً على ⟨خط⟩ ج د، وخط ح ز إما أن يكون متصلاً بخط هـ ح على استقامةٍ أو لا يكون متصلاً على استقامة. فإن كان خطا هـ ح ح ز متصلين على استقامةٍ على ما في الصورة الأولى، فإن خط هـ ز خط مستقيم وهو عمود على خط ج د. ونقطة هـ معلومة، لأنها مركز الدائرة المعلومة وخط ج د معلوم الوضع بالفرض لأنه مفروض. وقد خرج من نقطة هـ المعلومة إلى خط ج د المعلوم الوضع خط هـ ز فأحاط معه بزاوية معلومة. فخط هـ ز معلوم الوضع، كما تبيّن في الشكل كط من المعطيات. وخط ج د معلوم الوضع، فنقطة ز معلومة، كما تبيّن في الشكل كد من المعطيات. فنقطتا هـ ز معلومتان، فخط هـ ز معلوم القدر والوضع ودائرة ا ب معلومة الوضع، فنقطة ب معلومة. فخط ب ز معلوم القدر، وهو مقسوم بنصفين على نقطة ح لأن خط ب ح ز مستقيم، فنقطة ح معلومة، وخط ح ب معلوم القدر، فدائرة ب ط ز معلومة القدر والوضع.

فقد انتهى التحليل إلى أن يُدار على نقطة معلومة من خط هـ ز، المعلوم الوضع، دائرة معلومة القدر، وذلك ممكن.



2 فيكون خط ح ز: ناقصة [ب] – 5 هـ ز ... على خط: ناقصة [ب] – 6 المعلومة: المفروضة [س] – 8 الشكل: ناقصة [ب] – 9 كد: الرابع والعشرين [ب]

La synthèse de ce problème se fera comme nous allons le décrire: menons du point E une perpendiculaire à la droite CD, soit EG. Cette perpendiculaire coupe nécessairement la circonférence du cercle AB, qu'elle le coupe au point B, partageons la droite BG en deux moitiés au point H et posons H comme centre; on trace à partir du point H et à la distance HB le cercle BIG.

Je dis que le cercle BIG est tangent au cercle AB et est tangent à la droite CD.

Démonstration: La droite HG est un diamètre pour les deux cercles AB et BIG, donc la perpendiculaire menée du point B à la droite EH est tangente aux deux cercles, donc les deux cercles sont tangents. Mais puisque CD est perpendiculaire au diamètre BHG, alors le cercle BIG est tangent à la droite CD. Nous avons donc tracé un cercle tangent au cercle AB et tangent à la droite CD, qui est le cercle BIG. Ce qu'il fallait faire.

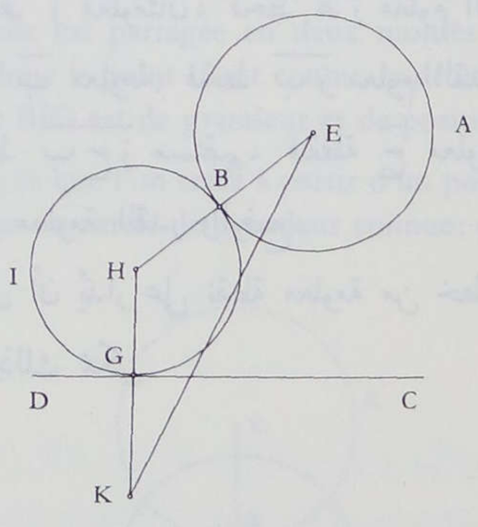


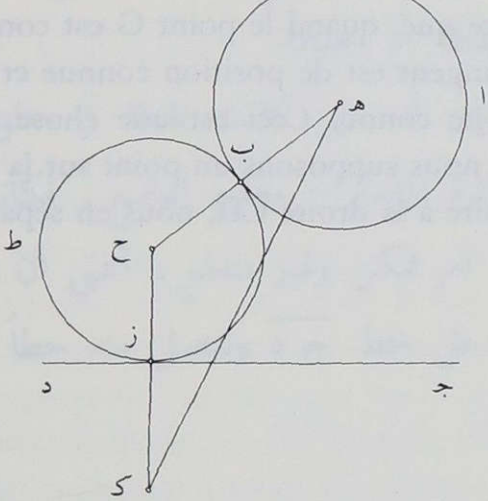
Fig. 24

Si les deux droites EH et HG ne sont pas en continuité comme dans le deuxième cas de figure, alors si l'analyste examine les propriétés de cette figure, il trouve que la droite BH est égale à la droite HG; nous trouvons que la droite EH excède donc la droite HG d'une grandeur égale à la droite BE.

وتركيب هذه المسألة يكون كما نصف: نخرج من نقطة ه عموداً على خط ج د وليكن ه ز. فهذا العمود لا بُدّ أن يقطع محيط دائرة ا ب، فليقطعها على نقطة ب ونقسم خط ب ز بنصفين على نقطة ح، ونجعل ح مركزاً ويُدار على نقطة ح وببعد ح ب دائرة ب ط ز.

فأقول: إن دائرة ب ط ز تماس دائرة ا ب وتماس خط ج د.

برهان ذلك: أن ⟨خط⟩ ح ز قطر لدائرتي ا ب ب ط ز، فالعمود الخارج من نقطة ب القائم على خط ه ح مماس للدائرتين، فالدائرتان متماستان. ولأن ج د عمود على قطر ب ح ز، يكون دائرة ب ط ز مماسة لخط ج د. فقد رسمنا دائرة تماس دائرة ا ب وتماس خط ج د، وهي دائرة ب ط ز؛ وذلك ما أردنا أن نعمل.



فإن كان خطا ه ح ح ز غير متصلين على استقامةٍ على ما في الصورة الثانية، فإن المحلل إذا نظر في خواص هذا الشكل وجد خط ب ح مثل خط ح ز؛ فنجد خط ه ح يزيد على خط ح ز بمقدار خط ب ه، وب ه معلوم القدر لأنه نصف

6 ح ز: حـ د [ب] ح ه [س] – 7 متماستان: ناقصة [س] – 12-13 ح ز: ح د [س] – 13 ب ه: ه ب [س] / وب ه: وه ب [س]

Mais BE est d'une grandeur connue puisqu'elle est le rayon du cercle AB qui est de grandeur et de position connues, car il a été donné. Si donc on ajoute à la droite HG une droite égale à la droite EB, elle sera égale à la droite EH. Prolongeons la droite HG dans la direction de G et séparons-en GK égale au rayon du cercle AB. KH sera donc égale à HE; joignons EK. Le triangle
B. 77ᵛ EHK sera donc isocèle. Mais si / le point G est de position connue, ⟨la droite⟩ HGK sera de position connue comme il a été montré dans la vingt-huitième proposition des *Données* et la droite GK sera de grandeur et de position connues, et le point K sera donc connu. Mais le point E est connu par hypothèse, donc la droite EK est d'extrémités connues, elle est donc de grandeur et de position connues, comme il a été montré dans la vingt-cinquième proposition des *Données*. L'angle EKH est connu car ses deux côtés sont de position connue et l'angle KEH est connu car il est égal à l'angle EKH. La droite EH est donc de position connue, le triangle EKH est
S. 325ʳ d'angles connus / et la droite KH est de position connue, donc les deux droites KH et EH sont de position connue; or elles se sont coupées au point H, donc le point H est connu.

L'analyse a abouti à ce que, quand le point G est connu, la droite GH qui est le rayon du cercle tangent est de position connue et le point H qui est le centre du cercle est donc connu. Ceci est une chose possible et n'est pas difficile, c'est-à-dire que nous supposons un point sur la droite CD duquel est menée une perpendiculaire à la droite CD, nous en séparons une droite égale au rayon du cercle AB.

قطر دائرة اب المعلومة القدر والوضع لأنها مفروضة. فإذا زيد على خط ح ز خط مساوٍ لخط ه ب، صار مساوياً لخط ه ح. فنخرج خط ح ز على استقامةٍ في جهة ز، ونفصل ز ک مثل نصف قطر دائرة ا ب. فيصير ک ح مثل ح ه؛ ونصل ه ک. فيكون مثلث ه ح ک متساوي الساقين. وإذا كانت / نقطة ز ب - ٧٧ - ظ معلومة الوضع كان ح ز ک معلوم الوضع، كما تبيّن في الشكل الثامن والعشرين من المعطيات، وكان خط ز ک معلوم القدر والوضع، فيكون نقطة ک معلومة. ونقطة ه معلومة بالفرض، فيكون خط ه ک معلوم النهايتين، فهو معلوم القدر والوضع، كما تبيّن في الشكل الخامس والعشرين من المعطيات. ويكون زاوية ه ک ح معلومة لأن خطيها معلوما الوضع، ويكون زاوية ک ه ح معلومة لأنها مساوية لزاوية ه ک ح. فيكون خط ه ح معلوم الوضع، ويكون مثلث ه ک ح معلوم الزوايا، / وخط ک ح معلوم الوضع، فخطا ک ح ه ح معلوما الوضع وقد س - ٣٢٥ - و تقاطعا على نقطة ح، فنقطة ح معلومة.

فقد انتهى التحليل إلى أنه متى كانت نقطة ز معلومة كان خط زح - الذي هو نصف قطر الدائرة المماسة - معلوم الوضع، فكانت نقطة ح التي هي مركز الدائرة معلومة. وهذا أمر ممكن وغير متعذرٍ، أعني أن نفرض نقطة على خط ج د، ويخرج منها عمود على خط ج د ونفصل منه خطاً مثل نصف قطر دائرة اب.

1 ح ز: جـ د [ب] - 1-2 خط مساو: خطا مساويا [ب، س] - 4 وإذا: فاذا [س] - 9 ه ک ح: ک ح [س] - 13 ز: د [ب] - 14 فكانت: وكانت [س] - 16 جـ د (الأولى): جـ ز [ب، س]

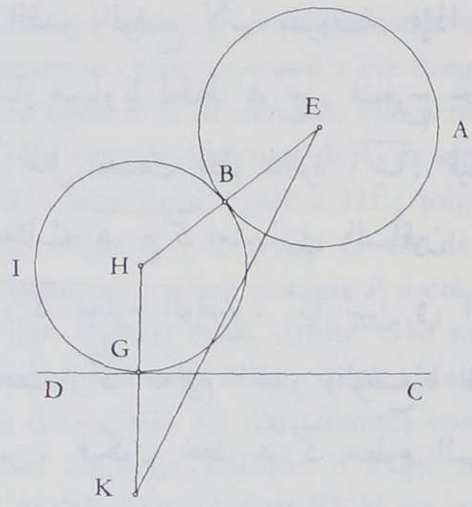
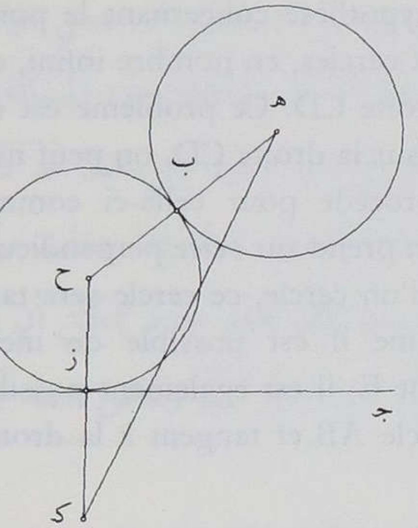


Fig. 25

La synthèse de ce problème se fera de la manière suivante: étant donnés le cercle et la droite, supposons sur la droite CD un point G quelconque. Menons de ce point la perpendiculaire GH, prolongeons-la dans la direction de G, séparons-en GK égale au rayon du cercle AB et joignons la droite EK. L'angle EKG est donc aigu car l'angle CGK est droit. Construisons sur la droite EK au point E un angle égal à l'angle EKH, soit l'angle KEB. La droite EB rencontre donc la droite KH, qu'elle la rencontre au point H. Puisque l'angle KEH est égal à l'angle EKH, la droite EH est égale à la droite KH; mais la droite EB est égale à la droite KG, il reste la droite BH égale à la droite GH. Posons le point H comme centre et traçons avec la distance HG un cercle, il passe donc par le point B puisque HB est égale à HG, soit le cercle BIG. Puisque la droite HE est un diamètre commun aux deux cercles AB et IG et que le point B est commun aux deux cercles, le cercle IG est tangent au cercle AB. Mais puisque CD est perpendiculaire à la droite GH, le cercle GI est tangent à la droite CD. Nous avons donc tracé un cercle tangent au cercle AB et tangent à la droite CD, c'est-à-dire le cercle BIG. Ce qu'il fallait faire.



وتركيب هذه المسألة يكون على هذه الصفة : نفرض الدائرة والخط، ونفرض على خط جـ د نقطة ز كيفما اتفق. ونخرج منها عمود ز ح ، ونخرجه في جهة ز على استقامة، ونفصل ز ك مثل نصف قطر دائرة ا ب ، ونوصل خط هـ ك. فيكون زاوية هـ ك ز حادة، لأن زاوية جـ ز ك قائمة. ونعمل على خط هـ ك على نقطة هـ منه زاوية مساوية لزاوية هـ ك ح ، ولتكن زاوية ك هـ ب. فخط هـ ب يلقى خط ك ح ، فليلقه على نقطة ح. فلأن زاوية ك هـ ح مساوية لزاوية هـ ك ح ، يكون خط هـ ح مثل خط ك ح ؛ وخط هـ ب مثل خط ك ز، فيبقى خط ب ح مثل خط ز ح. فنجعل نقطة ح مركزاً وندير ببعد ح ز دائرة، فهي تمرّ بنقطة ب ، لأن ح ب مثل ح ز، ولتكن دائرة ب ط ز. فلأن خط ح هـ قطر مشترك لدائرتي ا ب ط ز ونقطة ب مشتركة للدائرتين، يكون دائرة ط ز مماسة لدائرة ا ب. ولأن جـ د عمود على خط ز ح ، يكون دائرة ز ط مماسة لخط جـ د. فقد رسمنا دائرة تماس دائرة ا ب وتماس خط جـ د ، وهي دائرة ب ط ز؛ وذلك ما أردنا أن نعمل.

1 والخط : أثبت الواو فوق السطر [ب] – 2 جـ د : جـ ز [س] / ونخرجه : ونخرج [ب، س] – 3 ا ب : ا ب د [ب] / ونوصل : نوصل [س] – 9 ب : د [س] / ح هـ : هـ ح [س]

Il ressort de notre hypothèse concernant le point G qu'il est possible de construire de nombreux cercles, en nombre infini, chacun d'eux étant tangent au cercle AB et à la droite CD. Ce problème est donc indéterminé, puisque par tout point supposé sur la droite CD, on peut mener une perpendiculaire à la droite CD et on procède pour celle-ci comme on a procédé pour la perpendiculaire GH. On prend sur cette perpendiculaire un point tel que si on le pose comme centre d'un cercle, ce cercle sera tangent au cercle AB et à la droite CD. Mais comme il est possible de mener à la droite CD une perpendiculaire du point E, il est également possible de construire un cercle qui soit tangent au cercle AB et tangent à la droite CD d'après la première propriété mentionnée.

Nous avons traité exhaustivement les exemples de toutes les parties des problèmes géométriques.

Quant aux problèmes qui se rapportent à l'astronomie, la plupart se ramènent aux problèmes numériques ou aux problèmes géométriques, leurs exemples sont les exemples précédents; parmi ces problèmes il y a ceux qui se rapportent aux explications des mouvements des astres.

⟨15⟩ Nous présentons un exemple à partir duquel on montre l'analyse qui mène aux notions déterminées en astronomie, un de ces exemples est le mouvement du soleil.

Quand les anciens ont observé le mouvement du soleil et qu'ils l'ont mesuré par rapport aux centres des instruments, grâce auxquels ils ont observé le soleil, et qui tenaient lieu de centre de l'Univers, ils ont trouvé que son mouvement diffère par les mesures relatives aux centres des instruments, c'est-à-dire qu'ils ont trouvé que le soleil parcourt dans des temps égaux des angles inégaux, aux centres des instruments. Mais ils étaient convaincus que les mouvements des corps célestes ne peuvent être qu'égaux, semblables, simples et non composés car la substance des corps célestes est une substance simple, non composée et ne comprend pas de différence. Ainsi, quand ils ont trouvé que les mouvements du soleil étaient différents, tout en supposant que ses mouvements étaient égaux, ils ont cru que la position de l'orbe du soleil nécessitait que les mouvements apparents[20] du soleil soient différents de ses mouvements réels et ils ont déterminé la position de son orbe par l'analyse.

20. Littéralement: ce qui apparaît à la vision de ses mouvements.

وقد تبيّن من فرضنا لنقطة زَ أنه يمكن أن نعمل دوائر كثيرة بلا نهاية، كلّ واحدة منها مماسة لدائرة ا ب ولخط ج د. فيكون هذه المسألة سيّالة، لأن كل نقطة تُفرض على خط ج د يمكن أن يخرج منها عمود على خط ج د، ويُعمل فيه مثل ما عمل في عمود ز ح، وتؤخذ على ذلك العمود نقطة إذا جعلت مركزاً لدائرةٍ كانت الدائرة مماسة لدائرة ا ب ولخط ج د. وإن كان خط ج د يمكن أن يخرج إليه عمود من نقطة هـ، فإنه يمكن أن نعمل دائرة تماس دائرة ا ب وتماس خط ج د على الصفة المذكورة الأولى أيضاً.

فقد استوفينا أمثلة جميع أقسام المسائل الهندسية.

فأما المسائل التي تتعلق بعلم الهيئة فأكثرها يرجع إلى المسائل العددية والمسائل الهندسية. فأمثلتها هي الأمثلة التي تقدمت، ومنها ما يتعلق بكيفيات حركات الكواكب.

〈يه〉 ونحن نمثل فيه مثالاً يتبين منه التحليل الذي يؤدي إلى المعاني المستخرجة من علم الهيئة. فمن ذلك حركة الشمس.

فإن المتقدمين لمّا رصدوا حركة الشمس وقاسوها إلى مراكز الآلات التي رصدوا بها الشمس – التي تقوم مقام مركز العالم – وجدوا حركتها تختلف بالقياس إلى مراكز الآلات، أعني أنهم وجدوا الشمس تقطع في الأزمنة المتساوية زوايا غير متساوية عند مراكز الآلات. وقد كان تقرر في نفوسهم أن حركات الأجرام السماوية لا تكون إلاّ متساوية متشابهة بسيطة غير مركبة، لأن جوهرها جوهر بسيط غير مركب ولا فيه اختلاف. فلما وجدوا حركاتها مختلفة – مع فرضهم أن حركاتها متساوية – اعتقدوا أن وضع فلكها يوجب لها أن يكون ما يظهر بالرؤية من حركاتها مخالفاً لحركاتها الحقيقية،

1 واحدة : واحد [ب] – 2 مماسة : مماس [ب] / ج د : كتب «هـ» فوق الدال [س] – 6 المذكورة : ناقصة [س] – 9 تتعلق : يتعلق [س] / يرجع : رجع [س] – 12 مثالاً : ناقصة [س] / منه : من [س] – 15 الشمس : ناقصة [س] – 16 غير متساوية : مختلفة [س] – 17 تكون : يكون [س] – 18 جوهر : ناقصة [ب]

Mais il avaient trouvé que le centre du soleil se meut dans un seul plan stable qui coupe l'Univers. Pour eux, il était établi que la forme de l'Univers est une figure sphérique, il s'ensuivait que le plan dans lequel se meut le centre du soleil coupe la sphère de l'Univers, il s'ensuivait qu'un cercle s'engendre dans
S. 325ᵛ la surface de la sphère / de l'Univers dont le centre est le centre de l'Univers. Ils ont alors déterminé la position de ce cercle, ils ont considéré le mouvement du soleil par rapport à la circonférence de ce cercle et ils l'ont trouvé
B. 78ʳ différent. A partir de cette différence, ils ont déterminé la position / de l'orbe du soleil qui est provoquée par le mouvement régulier du soleil. Leur détermination de la position de cette orbe a été faite par l'analyse comme nous allons le décrire.

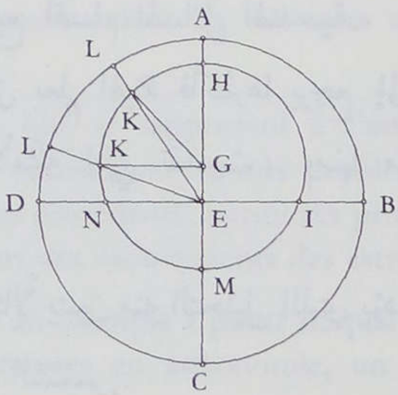
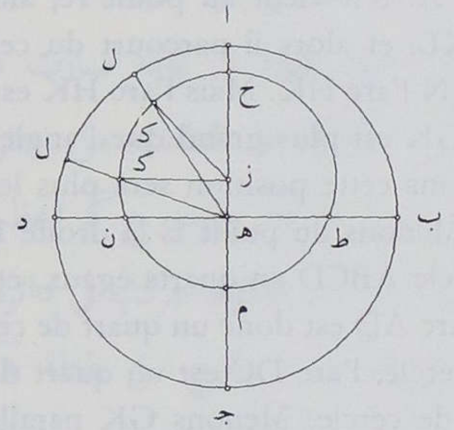


Fig. 26

Que le cercle, dont le centre est le centre de l'Univers dans le plan duquel se meut le centre du soleil, soit le cercle ABCD de centre E. Puisque le centre du soleil se meut toujours dans le plan de ce cercle, il est nécessaire que le centre du mouvement régulier par lequel se meut le soleil soit également dans le plan de ce cercle, que G soit le centre du mouvement régulier et que le centre du soleil se meuve par un mouvement régulier sur la circonférence du cercle HIMN. Si le centre du cercle HIMN était le centre du cercle ABCD, le soleil aurait parcouru deux arcs semblables des deux cercles en un même temps, et le mouvement du soleil suivant la circonférence du cercle HIMN serait également différent. Or le mouvement du soleil suivant la circonférence

واستخرجوا وضع فلكها بالتحليل. وقد كانوا وجدوا الشمس يتحرك مركزها في سطح واحد مستقر قاطع للعالم. وقد كان استقر عندهم أن شكل العالم شكل كرّي، فلزم من ذلك أن يكون السطح الذي يتحرك فيه مركز الشمس قاطعاً لكرة العالم، ويلزم من ذلك أن يحدث في سطح كرة / العالم دائرة مركزها مركز العالم. فاستخرجوا وضع هذه س - ٣٢٥ - ظ
الدائرة واعتبروا حركة الشمس بالقياس إلى محيط هذه الدائرة، فوجدوه مختلفاً. فاستخرجوا من هذا الاختلاف وضع / فلك الشمس الذي يحرك الشمس الحركة ب - ٧٨ - و
المستوية. وكان استخراجهم لوضع هذا الفلك بالتحليل على ما نصف.



ليكن الدائرة – التي مركزها مركز العالم التي هي يتحرك في سطحها مركز الشمس – دائرة ا ب ج د ومركزها ه. فمن أجل أن مركز الشمس يتحرك أبداً في سطح هذه الدائرة، وجب أن يكون مركز الحركة المستوية التي تحرك الشمس هو في سطح هذه الدائرة أيضاً، فليكن مركز الحركة المستوية زَ، وليكن مركز الشمس يتحرك بالحركة المستوية على محيط دائرة ح ط م ن. فلو كان مركز دائرة ح ط م ن هو مركز دائرة ا ب ج د، كانت الشمس تقطع من الدائرتين في زمان واحد قوسين متشابهتين، وكانت [تكون] حركة الشمس على محيط دائرة ح ط م ن أيضاً مختلفة. لكن حركة الشمس على محيط دائرة ح ط م ن بالفرض متساوية،

1 واستخرجوا : فاستخرجوا [س] – 2 مستقر : مستوى [ب] / قاطع : فقاطع [س] – 4 فاستخرجوا : فاستخروا [ب] – 6 هذا : هذه [س] – 8 هي : ناقصة [ب] / سطحها : وسطها [ب] – 11 زَ : ناقصة [ب]

du cercle HIMN est régulier par hypothèse, donc le centre du cercle HIMN n'est pas le centre du cercle ABCD, donc le point G n'est pas le point E, donc le point G est distinct du point E. L'analyse a abouti à ce que le centre du mouvement régulier est autre que le centre du mouvement différent qui est le centre de l'Univers.

Ils ont fait la synthèse de cette analyse en joignant le point E et le point G par une droite qu'ils ont prolongée de part et d'autre aux deux points A et C. Ils ont mené du point E la droite EKL qui coupe les deux cercles et ont joint GK. Si le soleil se trouve pour la vision sur la droite EL, alors il a parcouru sur le cercle ABC l'arc AL et il a parcouru du cercle HIMN l'arc HK, car dans sa rotation le soleil doit passer par le point H et il est vu par rapport au cercle ABCD au point A. S'il vient au point K, alors il se trouve pour la vision sur la droite EKL, et alors il parcourt du cercle ABCD l'arc AL et parcourt du cercle HIMN l'arc HK. Mais l'arc HK est un peu plus grand que l'arc AL, car l'angle HGK est plus grand que l'angle AEL. Son mouvement dans le cercle ABCD dans cette position sera plus lent que son mouvement dans le cercle HIMN. Menons du point E la droite BED suivant des angles droits, elle coupe le cercle ABCD en quarts égaux, et coupe le cercle HIMN en parties différentes, l'arc AD est donc un quart de cercle et l'arc HN est plus grand qu'un quart de cercle, l'arc DC est un quart de cercle et l'arc NM est plus petit qu'un quart de cercle. Menons GK parallèle à EN, l'arc HK est donc un quart de cercle et l'arc KN est l'excédent de l'arc HN sur un quart de cercle et il est la différence entre l'arc NM et un quart de cercle, il s'ensuit pour cette position que l'arc IHN est plus grand qu'un demi-cercle et l'arc IMN est plus petit qu'un demi-cercle.

فمركز دائرة ح ط م ن ليس هو مركز دائرة ا ب ج د، فنقطة ز ليست هي نقطة ه، فنقطة ز خارجة عن نقطة ه. فانتهى التحليل إلى أن مركز الحركة المستوية غير مركز الحركة المختلفة الذي هو مركز العالم.

فركبوا هذا التحليل بأن وصلوا بين نقطة ه وبين نقطة ز بخط مستقيم، وأخرجوه في الجهتين على استقامةٍ إلى نقطتي ا ج. وأخرجوا من نقطة ه خط ه ك ل يقطع الدائرتين ووصلوا ز ك. وكانت الشمس، إذا وجدت بالرؤية على خط ه ل، تكون قد قطعت من دائرة ا ب ج قوس ا ل وقطعت من دائرة ح ط م ن قوس ح ك، لأن الشمس في دورانها لا بُدّ أن تمرّ بنقطة ح وتُرى بالقياس إلى دائرة ا ب ج د على نقطة ا. فإذا صارت على نقطة ك، فإنها توجد بالرؤية على خط ه ك ل، فتكون قد قطعت من دائرة ا ب ج د قوس ا ل، وقطعت من دائرة ح ط م ن قوس ح ك. وقوس ح ك أعظم شيئاً من قوس ا ل، لأن زاوية ح ز ك أعظم من زاوية ا ه ل. فيكون حركتها في دائرة ا ب ج د في هذا الموضع أبطأ من حركتها في دائرة ح ط م ن. ونخرج من نقطة ه خط ب ه د على زوايا قائمة، فهو يقطع دائرة ا ب ج د بأرباع متساوية، ويقطع دائرة ح ط م ن بأقسام مختلفة، فيكون قوس ا د ربع دائرة ويكون قوس ح ن أعظم من ربع دائرة، ويكون قوس د ج ربع دائرة، ويكون قوس ن م أقل من ربع دائرة. ونخرج ز ك موازياً ل ه ن، فيكون قوس ح ك ربع دائرة، ويكون قوس ك ن هي زيادة قوس ح ن على ربع دائرة، وهي نقصان قوس ن م عن ربع دائرة، فلزم من هذا الوضع أن يكون قوس ط ح ن أعظم من نصف دائرة وقوس ط م ن أصغر من نصف دائرة.

1-2 فنقطة ز ليست هي نقطة ه: ناقصة [ب] – 3 الذي هو: التي هي [ب، س] – 4 وبين: و[س] – 6 ووصلوا: وضلوا [ب] / وكانت: فكانت [س] – 8 وترى: فيرى [س] – 10 خط: ناقصة [ب]– 11 ح ط م ن: خط ك ن [ب] – 15 ح ن: ح ر [س] – 17 ه ن: ه د [س] – 19 قوس: ناقصة [ب]

Si le mouvement du soleil sur le cercle HIMN est régulier, il faut qu'il parcourt l'arc IHN dans un temps plus long que le temps dans lequel il parcourt l'arc NMI. Mais s'il parcourt l'arc IHN, il parcourt dans le cercle ABCD l'arc BAC qui est un demi-cercle et s'il parcourt l'arc NMI, il parcourt dans le cercle ABCD l'arc DCB qui est un demi-cercle, donc le mouvement du soleil dans le demi-cercle BAD est plus lent que son mouvement dans le demi-cercle DCB, or celui-ci est le mouvement que l'on perçoit par la vision.

Puis ils ont également déterminé par l'analyse la grandeur de l'excédent de l'arc IHN sur l'arc NMI, à partir de la grandeur de l'excédent du temps dans lequel le soleil parcourt l'arc IHN sur le temps dans lequel il parcourt l'arc NMI, car le rapport du temps au temps est égal au rapport de la distance à la
S. 326r distance / si le mouvement et régulier.

Ils ont aussi déterminé à partir de la grandeur de l'excédent de l'arc IHN sur le demi-cercle, la grandeur de la droite EG et son rapport à la droite GH. Et de cette manière ils ont déterminé par l'analyse les positions des orbes de tous les astres errants, ainsi que ls grandeurs de ses orbes et l'éloignement de leurs centres. Ceci est suffisant comme exemples de l'analyse en astronomie.

Quant aux notions qui se rapportent à la musique et aux problèmes qu'on peut déterminer à partir de cet art, ils se ramènent tous aux problèmes numériques.

⟨16⟩ Comme exemple pour cela, notre énoncé: l'intervalle d'octave est composé de l'intervalle de quarte et de l'intervalle de quinte.

Soit l'intervalle d'octave entre les deux degrés A et B, soit l'intervalle de quarte entre les deux degrés C et D, soit l'intervalle de quinte entre les deux degrés E et F.

وإذا كانت حركة الشمس في دائرة ح ط م ن متساوية، وجب أن تقطع قوس ط ح ن في زمان أطول من الزمان الذي تقطع فيه قوس ن م ط. وهي إذا قطعت قوس ط ح ن تكون قد قطعت من دائرة ا ب ج د قوس ب ا ج التي هي نصف دائرة، وإذا قطعت قوس ن م ط، تكون قد قطعت من دائرة ا ب ج د قوس د ج ب التي هي نصف دائرة، فيكون حركة الشمس في نصف دائرة ب ا د أبطأ من حركتها في نصف دائرة د ج ب، وهذه هي الحركة التي تُدرك بالرؤية.

ثم استخرجوا بالتحليل أيضاً مقدار زيادة قوس ط ح ن على قوس ن م ط من مقدار زيادة الزمان الذي تقطع فيه الشمس قوس ط ح ن على الزمان الذي تقطع فيه قوس ن م ط، لأن نسبة الزمان إلى الزمان هي نسبة المسافة إلى المسافة / إذا كانت الحركة متساوية. س - ٣٢٦ -

واستخرجوا أيضاً من مقدار زيادة قوس ط ح ن على نصف دائرة مقدارَ خط ه ز ونسبته إلى خط ز ح. وعلى هذه الصفة استخرجوا بالتحليل أوضاع أفلاك جميع الكواكب المتحيّرة ومقادير أفلاكها وخروج مراكزها؛ وهذا القدر كافٍ في أمثلة تحليل الهيئة.

فأما المعاني التي تتعلق بعلم الموسيقى والمسائل التي تستخرج من هذه الصناعة، فإن جميعها يرجع إلى المسائل العددية.

⟨يو⟩ فالمثال في ذلك قولنا: الاتفاق الذي بالكل مؤلف من الاتفاق الذي بالأربع والاتفاق الذي بالخمس.

فليكن الاتفاق الذي بالكل بين نغمتي آ ب، وليكن الاتفاق الذي بأربع في نغمتي جَ دَ، وليكن الاتفاق الذي بالخمس في نغمتي هَ وَ.

2 ط ح ن: ح ط ن [س] / فيه: ناقصة [ب] – 8-9 ط ح ن ... قوس: ناقصة [ب] – 16 تتعلق: يتعلق [س] – 17 يرجع: ترجع [س] – 18 فالمثال: والمثال [س] – 20 بين: هو في [س] – 21 وَ: زَ [ب، س]

Je dis que le rapport entre les deux degrés A et B est composé du rapport entre les deux degrés C et D et du rapport entre les deux degrés E et F. Nous supposons qu'il en soit ainsi. Soit l'intervalle de quarte entre les deux degrés A et H, l'intervalle de quinte est alors entre les deux degrés H et B, B. 78v l'intervalle entre les deux degrés / A et B est composé de l'intervalle entre les degrés A et H et de l'intervalle entre les deux degrés H et B. Puisque l'intervalle de quarte est dans le rapport de un et un tiers, l'intervalle entre les deux degrés A et H est dans le rapport de un plus un tiers; puisque l'intervalle de quinte est dans le rapport de un plus un demi, l'intervalle entre les deux degrés H et B est dans le rapport de un plus un demi. Il est alors nécessaire que l'intervalle entre les degrés A et B soit composé du rapport de un plus un tiers et ⟨du rapport⟩ de un plus un demi. Mais le rapport composé du rapport de un plus un tiers et ⟨du rapport⟩ de un plus un demi est le rapport du double. Il est alors nécessaire que l'intervalle entre les deux degrés A et B soit dans le rapport du double. Mais il en est ainsi parce que l'intervalle d'octave est dans le rapport du double.

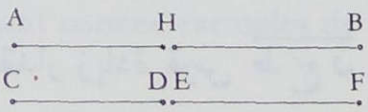


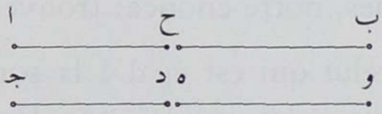
Fig. 27

Ainsi l'analyse a abouti à la notion donnée, c'est-à-dire: l'intervalle d'octave est dans le rapport du double, et c'est de cette façon que se fera l'analyse de tous les problèmes de composition.

La synthèse de ce problème: l'intervalle d'octave se trouve dans le rapport du double et le rapport du double est composé du rapport de un plus un tiers et ⟨du rapport⟩ de un plus un demi. L'intervalle de quarte est dans le rapport de un plus un tiers. L'intervalle de quinte est dans le rapport de un plus un demi et l'intervalle d'octave est composé de l'intervalle de quarte et de l'intervalle de quinte. Ce qu'il fallait démontrer.

Nous avons achevé les exemples de l'analyse de toutes les notions d'après lesquelles se divisent les parties de toutes les sciences mathématiques. Dans

فأقول : إن النسبة التي بين نغمتي آ بَ مؤلفة من النسبة التي بين نغمتي جـَ دَ ومن النسبة التي بين نغمتي هـ و، فنفرض أن ذلك كذلك، وليكن ⟨الاتفاق الذي بين⟩ نغمتي آ حَ – الذي بأربع – فيكون ⟨الاتفاق الذي بين⟩ نغمتي حَ بَ الذي بالخمس ويكون الاتفاق الذي بين نغمتي / آ بَ مؤلف من الاتفاق الذي بين نغمتي آ ب – ٧٨ – ظ حَ والاتفاق الذي بين نغمتي ح ب. فلأن الاتفاق الذي بأربع هو في نسبة مثل وثلث، يكون الاتفاق الذي بين نغمتي آ حَ هو في نسبة المثل والثلث. ولأن الاتفاق الذي بالخمس في نسبة المثل والنصف، يكون الاتفاق الذي بين نغمتي حَ بَ في نسبة المثل والنصف. فيلزم من ذلك أن يكون الاتفاق الذي بين نغمتي آ بَ مؤلفاً من نسبة المثل والثلث والمثل والنصف. لكن النسبة المؤلفة من نسبة المثل والثلث والمثل والنصف هي نسبة الضعف. فيلزم من ذلك أن يكون الاتفاق الذي بين نغمتي آ بَ هو في نسبة الضعف. لكنه كذلك، لأن الاتفاق الذي بالكل هو في نسبة الضعف.



فقد انتهى التحليل إلى معنى معطى وهو أن الاتفاق الذي بالكل هو في نسبة الضعف، وعلى هذه الصفة يكون تحليل جميع المسائل التأليفية.

وتركيب هذه المسألة : هو أن الاتفاق الذي بالكل يكون في نسبة الضعف، ونسبة الضعف مؤلفة من نسبة المثل والثلث ⟨والمثل⟩ والنصف. والاتفاق الذي بأربع هو في نسبة المثل والثلث، والاتفاق الذي بالخمس هو في نسبة المثل والنصف. والاتفاق الذي بالكل مؤلف من الاتفاق الذي بأربع والاتفاق الذي بالخمس؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

فقد أتينا على أمثلة تحليل جميع المعاني التي إليها تنقسم جزئيات جميع العلوم

2 وَ: رَ [ب، س] – 3 فيكون : فيكن [ب] / نغمتي : نغمتا [ب، س] – 4 مؤلف: مؤلفة [س] – 6 هو: ناقصة [ب] – 8 مؤلفًا : مؤلف [ب، س] – 9 هي : هو [ب] من [س] – 12 أن : ناقصة [س] – 15-16 المثل ... نسبة (الأولى) : ناقصة [س] – 16 هو: وهو [ب] / والاتفاق : فالاتفاق [س] – 19 إليها : ناقصة [ب]

tous ces exemples, nous avons cherché intentionnellement la facilité pour rendre aisée, à celui qui étudie l'art de l'analyse, sa compréhension.

⟨DEUXIÈME CHAPITRE⟩

Il nous reste à exposer des problèmes d'analyse comportant quelques difficultés pour qu'elle soit un instrument par lequel s'exerce celui qui examine ce traité et un guide pour celui qui tente d'acquérir l'art de l'analyse et que celui-ci soit orienté par les notions que l'on y utilise et par les ajouts que l'on ajoute à ses objets pour qu'il puisse manier l'art de l'analyse, car poursuivre la recherche de prémisses se fait par les ajouts que l'on ajoute et par les propriétés qui s'en dégagent. Nous nous limitons dans ces exemples seulement aux problèmes numériques et aux problèmes géométriques; ils sont plus clairs et tous les autres problèmes s'y ramènent.

⟨17⟩ Parmi ces problèmes, notre énoncé: trouver le nombre parfait.

Le nombre parfait est celui qui est égal à la somme de ses parties qui le mesurent. Ce problème est celui exposé par Euclide à la fin des livres arithmétiques de son ouvrage. Il n'a cependant pas mentionné son analyse, et rien dans ses propos ne montre comment il a trouvé le nombre parfait par l'analyse. Il l'a proposé seulement par synthèse, comme pour les autres problèmes qu'il a inclus dans son ouvrage. Nous montrons ici comment on trouve le nombre parfait par l'analyse, pour composer ensuite cette analyse.

La méthode de l'analyse de ce problème: nous considérons que le nombre parfait a été trouvé, qu'il soit par exemple le nombre AB, et que les parties qui le mesurent soient les nombres C, D, E, G, H, I, L, M, N. Considérons AB égal à la somme des nombres C, D, E, G, H, I, L, M, N. Nous examinons ensuite les propriétés des nombres ayant des parties. Si on examine les
S. 326ᵛ propriétés des nombres ayant / des parties, on trouve comme il a été montré

التعليمية، وجميع هذه الأمثلة اعتمدنا فيها السهولة ليسهل على طالب صناعة التحليل فهمها.

〈الفصل الثاني〉

وقد بقي علينا أن نذكر مسائل من التحليل فيها بعض الصعوبة ليكون آلة يرتاض بها من نظر في هذه المقالة ويسترشد بها من يروم اكتساب صناعة التحليل ويهتدي بالمعاني التي تُستعمل فيها وبالزيادات التي تزاد في موضوعاتها إلى التصرف في صناعة التحليل، لأن تصيُّد المقدمات إنما يكون بالزيادات التي تزاد وبالخواص التي تظهر في الزيادات، ونقتصر في هذه الأمثلة على مسائل عددية ومسائل هندسية فقط، فإنهما أبين وعليهما يحول في جميع المسائل.

〈يز〉 فمن ذلك قولنا: نريد أن نجد العدد التام.

والعدد التام هو المساوي لجميع أجزائه التي تَعُدُّه، وهذه المسألة هي التي ذكرها أقليدس في آخر العدديات من كتابه، إلا أنه لم يذكر تحليلها، ولا تبين في كلامه كيف وجد العدد التام بالتحليل، وإنما ذكره بالتركيب فقط كسائر المسائل التي ضمّنها كتابه، ونحن نبيّن في هذا الموضع كيف وجد العدد التام بالتحليل، ثم نركب التحليل.

وطريق التحليل لهذه المسألة: هو أن نعتقد أنه قد وجد العدد التام، وليكن بالمثال عدد اب وليكن أجزاؤه التي تعدّه أعداد جـ د هـ ز ح ط ل م ن، ولنعتقد أن اب مساوٍ لأعداد جـ د هـ ز ح ط ل م ن. ثم ننظر في خواص الأعداد ذوات الأجزاء. وإذا نظر في خواص الأعداد ذوات / الأجزاء، وجد أنه قد تبيّن في الشكل لو من المقالة س - ٣٢٦

2 فهمها: منها [س] – 4 علينا: ناقصة [س] / بعض: بعرض [س] – 6 تستعمل: يستعمل [ب] / وبالزيادات: بالزيادات [ب] / موضوعاتها: موضوعها [س] – 7 وبالخواص: وباخوص [ب] – 13 ذكره: ذكرها [س] – 14 نركب: ركب [س] – 17-18 وإذا نظر ... الأجزاء: مكررة [س]

dans la proposition 36 du neuvième livre, que si des nombres en nombre quelconque, se succèdent suivant le même rapport, et si on sépare du second et du dernier un nombre égal au premier, alors le rapport du reste du second au premier est égal au rapport du reste du dernier à la somme de tous les *nombres qui le précèdent*. Il s'ensuit que, étant donnés des nombres successifs proportionnels qui sont dans le rapport du double, si on retranche de leur second et de leur dernier un nombre égal au premier, alors le reste du second sera égal au premier et le reste du dernier sera égal à la somme de tous les nombres qui le précèdent. Mais pour les nombres successifs qui sont dans le rapport du double, chacun d'eux mesure le plus grand nombre et chacun d'eux est une partie du plus grand nombre. De tout cela, il s'ensuit que si les nombres AB, C, D, E, G, H, I, L, M, N, sont dans le rapport du double et sont successifs, alors chacun des nombres C, D, E, G, H, I, L, M, N, est une partie de AB, et si on retranche de AB un nombre égal à N, le reste de AB est égal à la somme des nombres restants qui sont des parties de AB. Mais AB tout entier est égal à la somme des parties, donc le nombre AB n'est pas dans le rapport du double avec tous les nombres restants successifs.

De même, parmi les propriétés des nombres successifs proportionnels qui sont dans le rapport de double et qui commencent par un, si on retranche de chacun d'eux un, ⟨chaque⟩ reste sera égal à la somme des nombres qui le *précèdent*, car *si on retranche* également un du second, qui est deux, le reste sera égal au premier, qui est un. Il s'ensuit que pour les nombres C, D, E, G, H, I, L, M, N, si certains sont successifs dans le rapport du double en commençant par AB, et si le dernier ⟨de ceux-là⟩ qui est le plus petit d'entre eux est inférieur de un au double de celui qui le précède immédiatement, alors tous les nombres qui succèdent à AB sont des parties de AB, et AB est égal à
B. 79r leur somme./

التاسعة : أنه إذا توالت أعداد على نسبة واحدة – كم كانت – وفُصل من الثاني ومن الأخير مثل الأول، فإن نسبة الباقي من الثاني إلى الأول هي نسبة الباقي من الأخير إلى جميع الأعداد التي قبله. فيلزم من ذلك أن تكون الأعداد المتوالية المتناسبة، التي هي في نسبة الضعف، إذا نقص من ثانيها ومن آخرها مثل الأول، كان الباقي من الثاني مثل الأول، فيكون الباقي من الأخير مثل جميع الأعداد المتقدمة. والأعداد المتوالية، التي في نسبة الضعف، كل واحد منها يعدّ العدد الأعظم وكل واحد منها هو جزءٌ من العدد الأعظم، فيلزم من جميع ذلك أن تكون أعداد اب جـ د هـ ز ح ط ل م ن إن كانت في نسبة الضعف وكانت متوالية، فإن كل واحد من جـ د هـ ز ح ط ل م ن هو جزء من اب، وأنه إذا نقص من اب مثل ن، كان الباقي من اب مثل جميع الأعداد الباقية التي هي أجزاء من اب. لكن جميع اب هو مساوٍ لجميع الأجزاء، فليس عدد اب مع جميع الأعداد الباقية المتوالية في نسبة الضعف.

وأيضاً فإن من خواص الأعداد المتوالية المتناسبة – التي في نسبة الضعف – المبتدئة من الواحد، أن كل واحد منها إذا نقص منه واحد، كان الباقي منه مساوياً لجميع الأعداد التي قبله، لأنه إذا نُقص من الثاني أيضاً الذي هو اثنان واحدٌ كان الباقي [من الباقي] مساوياً للأول الذي هو واحد. فيلزم من ذلك أن تكون أعداد جـ د هـ ز ح ط ل م ن، إن كان بعضها متوالياً في نسبة الضعف مبتدئاً من اب وكان آخرها الذي هو أصغرها ينقص عن ضعف العدد الذي قبله الذي يليه واحداً، كانت جميع الأعداد التي تلي اب أجزاءً من اب وكان اب مساوياً لجميعها. / ب – ٧٩ – و

2 الأخير: الاجزا [ب] / الأخير: الاجزا [ب] – 3 فيلزم : ويلزم [س] / هي : ناقصة [س] – 4 في : ناقصة [ب] – 6 يعدّ : بعدد [س] / وكل : فكل [س] / جزء : جزئى [ب] – 7 فيلزم : ناقصة [ب] – 10 الباقية : ناقصة [ب] / جميع : ناقصة [ب] – 11 المتوالية : متوالية [ب، س] – 12 المتناسبة : ناقصة [س] – 14-15 أيضًا ... الباقي : ناقصة [ب] – 15 مساويًا : مساوى [ب] / جـ : ح [ب] ؛ كتب قبلها «اب» [س] – 16 مبتدئا : مبتدية [س] / آخرها : اخيرها [س] – 17 الذي يليه : ناقصة [ب] / كانت : كان [ب]

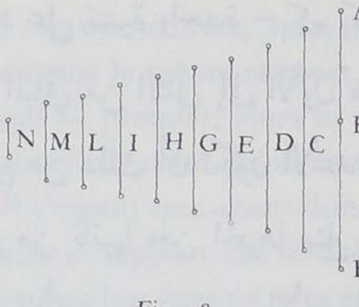
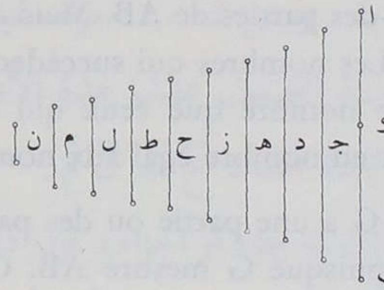


Fig. 28

Que les nombres AB, C, D, E, G soient successifs dans le rapport du double, et que le nombre G soit inférieur de un au double du nombre H, séparons de AB KB égal à G, alors AK sera égal à la somme des nombres C, D, E, G; mais G est inférieur de un au double de H; il est donc égal à la somme de H, I, L, M, N; or KB est égal à G et KB est égal à la somme de H, I, L, M, N, donc AB tout entier est égal à la somme des nombres C, D, E, G, H, I, L, M, N.[21] Mais les nombres H, I, L, M, N, sont des nombres successifs dans le rapport du double commençant par un, et N est un. Mais puisque C est la moitié de AB, C mesure AB par les unités de M, D mesure AB par les unités de L et E mesure AB par les unités de I, et de même pour les nombres restants. Si donc les nombres C, D, E, G, sont en même nombre que les nombres H, I, L, M, alors chacun des nombres qui succèdent à AB mesure AB par les unités de l'un des nombres qui succèdent à N et chacun des nombres qui succèdent à N mesure AB par les unités de l'un des nombres qui succèdent à AB. Ainsi, tous les nombres sont parties de AB et aucun autre nombre ne mesure AB. Si les nombres qui succèdent à AB sont plus nombreux que les nombres qui succèdent à N, si certains des nombres qui succèdent à AB mesurent AB par les unités des nombres qui succèdent à N, et si les nombres restants qui succèdent à AB mesurent AB par les unités d'autres nombres, alors ces autres nombres sont des parties de AB. Mais AB n'a d'autres parties que les nombres C, D, E, G, H, I, L, M, N. Donc les nombres qui succèdent à AB ne sont pas plus nombreux que les nombres qui succèdent à N. Si les nombres qui succèdent à AB sont moins nombreux que les nombres qui succèdent à N, alors certains nombres qui succèdent à N mesurent AB par les unités des nombres qui succèdent à AB, et les nombres restants qui succèdent à N mesurent AB par les unités d'autres nombres, ces

21. Le paragraphe indiqué entre *...* aurait dû se placer quelques lignes avant, c'est-à-dire avant la phrase commençant par «il s'ensuit que». Cet endroit correspond, nous semble-t-il à une rupture du texte, constatée dans les manuscrits B et S.



فليكن أعداد ا ب ج د ه ز متوالية في نسبة الضعف وعدد ز ينقص عن ضعف عدد ح بواحد، ونفصل ⟨من ا ب⟩ ك ب مثل ز، فيكون ا ك مثل جميع أعداد ج د ه ز، وز ينقص عن ضعف ح بواحدٍ، فهو مساوٍ لجميع ح ط ل م ن؛ وك ب مثل ز وك ب مثل جميع ح ط ل م ن؛ فجميع ا ب مثل جميع أعداد ج د ه ز ح ط ل م ن، وأعداد ح ط ل م ن أعداد متوالية في نسبة الضعف مبتدئة من الواحد، ون هو الواحد. ولأن ج نصف ا ب، يكون ج يعدّ ا ب بآحاد م، ويكون د يعدّ ا ب بآحاد ل، ويكون ه يعدّ ا ب بآحاد ط، وكذلك الباقي. فإن كانت أعداد ج د ه ز عدتها عدة أعداد ح ط ل م، كان كل واحد من الأعداد التي تلي ا ب يعدّ ا ب بآحاد واحد من الأعداد التي تلي ن، ويكون كل واحد من الأعداد التي تلي ن يعدّ ا ب بآحاد واحد من الأعداد التي تلي ا ب. فيكون جميع الأعداد أجزاءً من ا ب، ولا يكون عدد آخر يعدّ ا ب. وإن كانت الأعداد التي تلي ا ب أكثر عدداً من الأعداد التي تلي ن، وكانت بعض الأعداد التي تلي ا ب تعدّ ا ب بآحاد الأعداد التي تلي ن، وكانت بقية الأعداد التي تلي ا ب تعدّ ا ب بآحاد أعداد أخر، فيكون تلك الأعداد الأخر أجزاءً من ا ب، وليس لـ ا ب أجزاء غير أعداد ج د ه ز ح ط ل م ن. فليس الأعداد التي تلي ا ب أكثر عدداً من الأعداد التي تلي ن. وإن كانت الأعداد التي تلي ا ب أقل عدداً من الأعداد التي تلي ن، كانت بعض الأعداد التي تلي ن تعدّ ا ب بآحاد الأعداد التي تلي ا ب، وكانت بقية الأعداد التي تلي ن تعدّ ا ب بآحاد أعداد أخر، فيكون تلك

2 ج: ح [ب] – 3 وك ب: ف ك ب [س] – 4 جميع (الأولى): ناقصة [س] / ج: ح [ب] – 6 ج: ح [س] –
12 وكانت: كانت [س] – 13 الأخر: الاخير [ب] – 14 لـ: ناقصة [ب] – 17 أخر: الاخر [ب]

autres nombres sont donc des parties de AB. Mais AB n'a pas d'autres parties que les nombres donnés. Les nombres qui succèdent à AB suivant le rapport du double sont en même nombre que ceux qui succèdent à N. Ainsi les nombres C, D, E, G, sont en nombre égal aux nombres H, I, L, M.

De même si le nombre G a une partie ou des parties, alors cette partie ou ces parties mesurent AB puisque G mesure AB. Cette partie ou ces parties sont une partie ou des parties de AB, et aucune n'est l'un des nombres C, D, E, G, H, I, L, M, car aucun des nombres C, D, E n'est une partie de G, puisque chacun d'eux est plus grand que G, et aucun des nombres H, I, L, M ne mesure G, car si on ajoute un à G, alors les nombres H, I, L, M le mesurent et aucun des nombres H, I, L, M ne mesure le nombre un ajouté, car chacun d'eux est plus grand que un, donc aucun des nombres H, I, L, M
S. 327r ne mesure le nombre / G, donc aucun d'eux n'est partie du nombre G; si donc le nombre G a une partie ou des parties différentes de l'unité, alors cette partie — ou ces parties — est une partie de AB, et chacune d'elles est autre que les nombres C, D, E, G, H, I, L, M. Mais AB n'a d'autres parties que ces nombres et l'unité, donc le nombre G est un nombre premier.

L'analyse a abouti à ce qu'il y a entre le nombre AB et le nombre G, des nombres qui sont tous successifs dont le rapport est le double, que le nombre G parmi eux est premier, et que le nombre G est inférieur d'une unité au double de l'un des nombres successifs proportionnels commençant par un dont le rapport est le double. Cette notion est possible, c'est-à-dire l'existence d'un nombre parmi les nombres successifs dont le rapport est le double et commençant par un, et tel que si on en retranche un, on a un nombre premier.

La synthèse de ce problème se fera comme nous allons le décrire: nous considérons par induction les nombres pairement pairs, c'est-à-dire ceux qui sont dans le rapport du double en commençant par un. Nous retranchons un

الأعداد الأخر أجزاءً من اب. وليس لـ اب أجزاء غير الأعداد المفروضة. فالأعداد التي تلي اب المتوالية على نسبة الضعف عدتها عدة الأعداد التي تلي ن. فيكون عدة أعداد جـ د هـ ز مساوية لعدة أعداد ح ط ل م.

وأيضاً فإن عدد ز إن كان له جزء أو أجزاء، فإن ذلك الجزء – أو الأجزاء – يعدّ اب، لأن ز يعدّ اب. فيكون ذلك الجزء – أو الأجزاء – جزءاً – أو أجزاءً – من اب، وليست واحداً من أعداد جـ د هـ ز ح ط ل م، لأن أعداد جـ د هـ ليس واحد منها جزءاً من ز، لأن كل واحد منها أعظم من ز، وأعداد ح ط ل م ليس واحد منها يعدّ ز، لأن ز إذا زيد عليه واحد، كانت أعداد ح ط ل م تعدّه، وليس واحد من أعداد ح ط ل م يعدّ الواحد الزائد، لأن كل واحد منها أكثر من الواحد، فأعداد ح ط ل م لا تعدّ عدد / [س - ٣٢٧ -] ز، فليس واحد منها جزءاً من عدد ز، فإن كان لعدد ز جزء أو أجزاء غير الواحد، فإن ذلك الجزء أو الأجزاء هو جزء من اب، وهو غير كل واحد من أعداد جـ د هـ ز ح ط ل م. لكن اب ليس له جزء غير هذه الأعداد والواحد؛ فعدد ز إذن عدد أول.

فقد انتهى التحليل إلى أن بيْن عدد اب وبين عدد ز أعداد وجميعها متوالية على نسبة الضعف، وأن عدد ز منها أول، وأن عدد ز ينقص عن ⟨ضعف⟩ أحد الأعداد المتوالية المتناسبة التي في نسبة الضعف المبتدئة من الواحد بواحد. وهذا المعنى ممكن وهو وجود عدد من الأعداد المتوالية المتناسبة التي في نسبة الضعف المبتدئة من الواحد، وإذا نقص منه واحد، كان ذلك العدد عدداً أولَ.

وتركيب هذه المسألة يكون كما نصف: نستقرئ أعداد زوج الزوج، وهي التي في نسبة الضعف المبتدئة من الواحد، وننقص من كل واحد منها واحداً، فأيّها كان أولَ

1 لـ اب: اب [ب] – 6 أعداد (الأولى): الاعداد [ب] / جـ (الثانية): ناقصة [س] / واحد: واحدا [ب] – 7 من ز (الثانية): من ن [ب] منه [س] – 8-9 تعدّه ... م: مكررة [س] – 9 أعداد: الأعداد [ب] – 10 جزء: جزا [س] – 11 غير الواحد: لواحد [س] – 12 والواحد: فالواحد [ب] – 14 وجميعها: جميعها [ب] – 15 أحد: واحد [ب] – 18 أولَ: اولاً [ب] – 19 نستقرئ: نستقرا [ب، س] – 20 واحدًا: واحد [ب] / أول: اولا [ب، س]

de chacun d'eux, celui qui sera premier, nous le doublons autant de fois jusqu'à ce que le nombre des nombres successifs ainsi doublés soit égal au nombre des nombres successifs proportionnels qui précèdent ce nombre en comptant avec l'unité qui est leur premier nombre. Le plus grand nombre auquel aboutit le doublement est un nombre parfait.

Exemple: Les nombres A, B, C, D, E, GH sont des nombres successifs dont le rapport est le double. Parmi eux A est égal à un, et si on retranche de GH un, le reste sera un nombre premier. Retranchons de GH le nombre un qui est SH, il reste GS un nombre premier; nous doublons GS autant de fois jusqu'à ce que le nombre des doublements soit égal au nombre des nombres A, B, C, D, E, soient les nombres GS, I, K, L, NO.

Je dis que le nombre NO est un nombre parfait.

Démonstration: Séparons OP égal à GS, donc NP est égal à la somme des nombres L, K, I, GS; mais le nombre PO est égal à la somme des nombres E, D, C, B, A; le nombre NO sera donc égal à la somme des nombres A, B, C, D, E, GS, I, K, L. Mais chacun des nombres L, K, I, GS mesure NO par les unités de l'un des nombres E, D, C, B, et chacun des nombres B, C, D, E, mesure NO par les unités de l'un des nombres GS, I, K, L. Tous les nombres B, C, D, E, GS, I, K, L, sont des parties de NO, mais on a montré que NO est égal à la somme de ces nombres plus A qui est égal à un. Il nous reste à démontrer qu'aucun nombre autre que ces nombres ne mesure NO.

Que le nombre M mesure NO; je dis que M est l'un des nombres B, C, D,
B. 79v E, GS, I, K, L. Que le nombre / M mesure NO par les unités du nombre Q. Si on le multiplie ensuite par Q, on a NO; mais le nombre GS mesure NO par les unités du nombre E, si donc on multiplie GS par E, on a NO. Le produit de E par GS est donc égal au produit de M par Q. Le rapport de GS à Q est donc égal au rapport de M à E. Ou bien GS mesure Q, ou bien il ne le mesure pas. Si GS mesure Q, alors M mesure E; mais les nombres A, B, C,

ضوعف مرات إلى أن تصير عدة الأعداد المتوالية المضاعفة بعدة الأعداد المتوالية المتناسبة التي قبل ذلك العدد مع الواحد الذي هو أولها، فيكون أعظم الأعداد الذي ينتهي إليه التضعيف عدداً تاماً.

ومثال ذلك: أعداد ا ب ج د هـ زح متوالية على نسبة الضعف وا منها واحد، فزح إذا نقص منه واحد، كان الباقي عدداً أول. ويُنقص من زح واحد – وهو س ح – فيبقى زس عدداً أولَ، فيُضعّف زس مرات حتى تصير عدة الأضعاف مثل عدة أعداد ا ب ج د هـ، وليكن أعداد زس ط ك ل ن ع.

فأقول: إن عدد ن ع عدد تام.

برهان ذلك: أنا نفصل ع ف مثل زس، فيكون ن ف مثل جميع أعداد ل ك ط زس، وعدد ف ع مثل جميع أعداد هـ د ج ب ا، فيكون عدد ن ع مساوياً لجميع أعداد ا ب ج د هـ زس ط ك ل. وأعداد ل ك ط زس كل واحد منها يعدّ ن ع بعدد آحاد واحد من أعداد هـ د ج ب، ويكون كل واحد من أعداد ب ج د هـ يعدّ ن ع بعدد آحاد واحد من أعداد زس ط ك ل. فيكون جميع أعداد ب ج د هـ زس ط ك ل أجزاء من ن ع، ون ع قد تبيّن أنه مساوٍ لجميع هذه الأعداد ⟨مع ا الذي هو الواحد⟩. فقد بقي أن نبيّن أن عدد ن ع ليس يعدّه عدد غير هذه الأعداد.

وليكن عدد م يعدّ ن ع. فأقول: إن م هو واحد من أعداد ب ج د هـ زس ط ك ل. وليكن عدد / م يعدّ ن ع بآحاد عدد ق. ثم إذا ضُرب في ق كان منه ن ع؛ وعدد ب – ٧٩ – ظ
زس يعدّ ن ع بآحاد عدد هـ، فزس إذا ضُرب في هـ كان منه ن ع. فضرب هـ في زس مثل ضرب م في ق، فنسبة زس إلى ق كنسبة م إلى هـ. وزس إما أن يعدّ ق أو لا يعدّه؛ فإن كان زس يعدّ ق فم يعدّ هـ؛ وأعداد ا ب ج د هـ متوالية من الواحد

1 عدة: مرة [س] / المتوالية: المبتدئة [ب] / بعدة: بعد [س] – 2 الذي (الثانية): التي [س] – 4 ومثال: مثال [ب] – 5 فزح: وزح [س] / أول: اولا [ب، س] – 6 أول: اولا [ب، س] / مرات: من ا ب [س] / عدة: عدده [ب] – 9 ن ف: رب [ب] / ل: اول [س] – 10 ف ع: نع [ب] / ن ع: رع [س] – 11 ط (الأولى): ناقصة [ب] / كل واحد منها: ناقصة [ب] / ن ع: رع [س] – 12 د (الأولى): ر [ب، س] – 16 د: و د [س] – 18 هـ في: هـ ح [س] – 20 فم: نم [ب] / يعدّ هـ: يعده [س] / د: و [س]

D, E sont successifs à partir de l'unité et proportionels, celui qui succède à l'unité est ⟨un nombre⟩ premier, puisqu'il est deux; donc aucun nombre ne mesure le plus grand que l'un d'entre eux, comme il a été montré dans la proposition 13 du neuvième livre; le nombre M est donc l'un des nombres B, C, D, E. Si le nombre GS ne mesure pas Q, alors ils sont premiers entre eux, comme il a été montré dans la proposition 31 du septième livre; s'ils sont premiers entre eux, alors ils sont les deux plus petits nombres suivant leur rapport, comme il a été montré dans la proposition 22 du septième livre, et si les deux nombres GS et Q sont les deux plus petits nombres suivant leur rapport, alors ils mesurent les nombres qui sont suivant leur rapport comme il a été montré dans la proposition 2O du septième livre. Si donc le nombre GS ne mesure pas Q, ils sont les deux plus petits nombres suivant leur rapport et ils mesurent les nombres qui sont suivant leur rapport. Mais le rapport de GS à Q est égal au rapport de M à E. Donc le nombre Q mesure E; donc le nombre Q est l'un des nombres B, C, D. Donc le nombre Q mesure NO par le nombre des unités de l'un des nombres GS, I, K, L. Mais Q mesure NO par le nombre des unités de M, donc le nombre M est l'un des nombres GS, I, K, L.

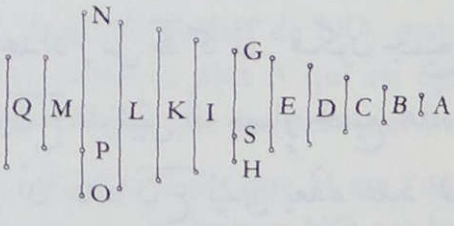
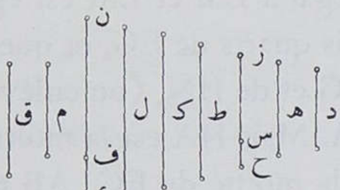


Fig. 29

Tout nombre qui mesure NO est donc l'un des nombres B, C, D, E, GS, I, K, L. Et aucun nombre, autre que les nombres B, C, D, E, GS, I, K, L et A qui est l'unité, ne mesure NO. Mais le nombre NO est égal à la somme de ces nombres, donc le nombre NO est un nombre parfait. Ce qu'il fallait démontrer.

⟨18⟩ Parmi ces exemples, notre énoncé: trouver trois nombres tels que si
S. 327^{v} on ajoute aux deux tiers du deuxième la moitié du premier,/ si on ajoute aux
trois quarts du troisième le tiers du deuxième et si on ajoute à la moitié du
premier le quart du troisième, ces trois ⟨sommes⟩ seront égales.

متناسبة، والذي يلي الواحد أول، لأنه اثنان، فليس يعدّ أكثرها إلاّ عدد منها، كما تبيّن في الشكل يج من المقالة التاسعة، فعدد م هو أحد أعداد [ا] ب ج د ‹ه›. وإن كان عدد زس لا يعدّ ق، فهو أول عنده، كما تبيّن في الشكل لا من المقالة السابعة؛ وإذا كان أول عنده، فهما أقل عددين على نسبتهما، كما تبيّن في الشكل كب من المقالة السابعة. وإذا كان عددا زس ق أقل عددين على نسبتهما، فهما يعدّان الأعداد التي على نسبتهما، كما تبيّن في الشكل ك من المقالة السابعة. فإذا كان عدد زس لا يعدّ ق، فهما أقل عددين على نسبتهما ويعدّان الأعداد التي على نسبتهما. ونسبة زس إلى ق كنسبة م إلى ه. فعدد ق يعدّ ه، فعدد ق هو واحد من أعداد [ا] ب ج د، فعدد ق يعدّ ن ع بعدد آحاد عدد من أعداد زس ط ك ل. لكن ق يعدّ ن ع بعدد آحاد م، فعدد م هو واحد من أعداد زس ط ك ل.



فكل عدد يعدّ ن ع فهو واحد من أعداد ب ج د ه زس ط ك ل. وليس يعدّ ن ع جزء غير أعداد ب ج د ه زس ط ك ل، وا الذي هو الواحد. وعدد ن ع مساوٍ لجميع هذه الأعداد، فعدد ن ع عدد تام؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

‹يح› ومن ذلك قولنا: نريد أن نجد ثلاثة أعداد إذا أضيف إلى ‹ثلثي› الثاني منها نصف الأول / وأضيف إلى ‹ثلاثة أرباع› الثالث ثلث الثاني وأضيف إلى ‹نصف› الأول ربع الثالث، صارت الثلاثة متساوية. س – ٣٢٧ – ظ

1 الثنان: اثنين [ب، س] – 2 يج: لج [ب] / أحد: واحد من [س] / ب: ف [ب] – 3 تبين: ناقصة [س] – 4 أول: اولا [ب، س] / نسبتهما: نسبتها [س] – 8 يعدّ ه: يعده [س] / فعدد (الثانية): بعدد [س] – 9 لكن: ناقصة [ب] – 11 وليس: فليس [س] – 12 آ: ناقصة [س] – 13 ن ع: ف ع [س] – 15 وأضيف (الأولى): المخطوطة متآكلة في هذا الموضع [س]

L'analyse de ce problème se fera comme nous allons le décrire: soient les nombres AB, CD et EG. Séparons de AB sa moitié, qui est AH, et ajoutons-la à CD, soit CI. Séparons de CD son tiers, soit KD, et ajoutons-le à EG, soit EL. Séparons de EG son quart, soit MG, et ajoutons-le à AB, soit AN. Donc les trois nombres HN, IK et LM sont égaux. Supposons qu'il en soit ainsi et examinons ce qui est nécessaire aux grandeurs des nombres après les ajouts. Puisque HN est égal à IK et que IK est IC, qui est la moitié de AB, plus CK, qui est les deux tiers de CD, et que HA est la moitié de AB et est donc égal à IC, il reste AN égal à CK. Mais AN est le quart de EG, donc les deux tiers de CD sont égaux au quart de EG, CD tout entier est donc égal au quart de EG plus son huitième.

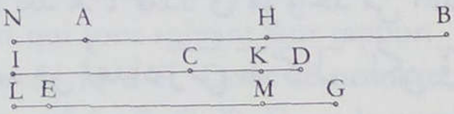


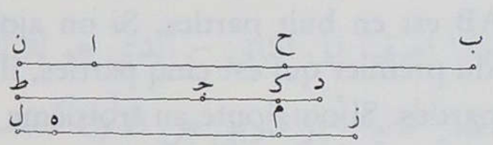
Fig. 30

De même, puisque HN est égal à LM et LM est égal à LE, qui est le tiers de CD, plus EM qui est les trois quarts de EG, et que AN est le quart de EG, on enlève de EM le quart de EG et de HN, ⟨on enlève⟩ AN, il reste donc LE plus la moitié de EG égal à HA. Mais HA est la moitié de AB, donc la moitié de AB est le tiers de CD plus la moitié de EG, AB tout entier est donc égal aux deux tiers de CD plus EG tout entier. Mais les deux tiers de CD sont le quart de EG, donc AB tout entier est égal à EG plus son quart. Le rapport de AB à EG est donc égal au rapport de cinq à quatre, il est alors égal au rapport de dix à huit. Mais le rapport de CD à EG est le rapport de trois à huit, et le rapport de AB à CD est le rapport de dix à trois.

L'analyse a donc abouti à montrer que les rapports des nombres cherchés les uns aux autres sont des rapports connus, leur existence est donc possible.

La synthèse de ce problème se fera de la manière suivante: supposons un

فتحليل هذه المسألة هو كما نصف : لتكن الأعداد اب جد هز. ولنفصل من اب نصفه وهو اح ويُضاف إلى جد، وليكن جط ؛ ونفصل من جد ثلثه، وليكن كد ويُضاف إلى هز، وليكن هل ؛ ونفصل من هز ربعه وليكن مز، ويُضاف إلى اب وليكن ان. فيصير أعداد حن طك لم الثلاثة متساوية. فنفرض أن ذلك كذلك، وننظر فيما يلزم من مقادير الأعداد من بعد الزيادات. فلأن حن مثل طك وطك هو طج الذي هو نصف اب وجك الذي هو ثلثا جد وحا هو نصف اب فهو مثل طج، فيبقى ان مثل جك وان هو ربع هز، فثلثا جد هو ربع هز، فجميع جد هو ربع وثمن هز.



وأيضاً من أجل أن حن مثل لم ول م هو له – الذي ثلث جد – وهم، الذي هو ثلاثة أرباع هز، وان هو ربع هز، فيسقط من هم ربع هز ومن حن ان، فيبقى له مع نصف هز مثل حا. وحا هو نصف اب، فنصف اب هو ثلث جد ونصف هز، فكل اب هو ثلثا جد وكل هز. لكن ثلثا جد هو ربع هز، فكل اب هو مثل هز ومثل ربعه، فنسبة اب إلى هز هي نسبة خمسة إلى أربعة، فهي نسبة عشرة إلى ثمانية. ونسبة جد إلى هز نسبة ثلاثة إلى ثمانية، ونسبة اب إلى جد هي نسبة عشرة إلى ثلاثة.

فقد انتهى التحليل إلى أن نبيّن أن نسب الأعداد المطلوبة بعضها إلى بعض نسب معلومة، فوجودها إذن ممكن.

وتركيب هذه المسألة يكون على هذه الصفة : نفرض عدداً له ربع وثمن، أيّ عدد

1 الأعداد : اعداد [س] – 2 جد ثلثه : جَ وثلثه [س] – 3 هل : هر [ب] – 4 اب : جب [ب، س] / حن : حر [ب] – 7 جك : جحك [س] / هز (الأولى) : زه [س] – 8 هو: الأفصح «هما»، ولكنه يقصد العدد، ولن نشير إلى مثلها فيما بعد – 13 اب (الثانية) : اه [ب] – 14 ونسبة (الأولى) : ولنسبة [ب]

nombre qui a un quart et un huitième, quel que soit ce nombre, soit le nombre AB, ajoutons à celui-ci son quart, qu'il devienne le nombre CD et prenons également son quart et son huitième, que ⟨leur somme⟩ soit EG.

Je dis que le nombre CD est le premier nombre cherché et que EG est le deuxième nombre et que AB est le troisième nombre.

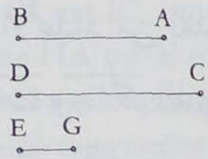


Fig. 31

Démonstration: Le nombre CD est en dix parties, le nombre EG est en trois parties et le nombre AB est en huit parties. Si on ajoute au second qui est trois parties, la moitié du premier qui est cinq parties, il vient huit parties et il reste du premier cinq parties. Si on ajoute au troisième qui est huit parties, le tiers du second qui est une seule partie, le troisième sera neuf parties, et il reste du second sept parties. Si on ajoute ⟨à ce qui reste du⟩ premier qui est cinq parties, le quart du troisième qui est deux parties, le premier devient sept parties, mais le troisième est devenu sept parties. Les nombres deviennent égaux après les ajouts. Ce qu'il fallait trouver.

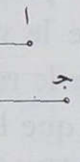
B. 80r Il ressort de cette synthèse / que ce problème est indéterminé, car il s'achève pour tout nombre qui a un huitième. Ce qu'il fallait démontrer.

⟨19⟩ Parmi ces exemples, notre énoncé: diviser deux nombres connus suivant trois rapports qui sont égaux à des rapports donnés.

Soient les deux nombres AB et CD, et les rapports donnés sont le rapport de E à G, le rapport de H à I et le rapport de K à L. Que le plus grand rapport soit le rapport de E à G et le plus petit rapport soit le rapport de K à L.

كان، وليكن عدد آ ب، ونضيف إليه ربعه وليصرْ عدد ج د، ونأخذ أيضاً ربعه وثمنه وليكن ه ز.

فأقول: إن عدد ج د هو العدد الأول المطلوب وإن ه ز هو العدد الثاني وإن آ ب هو العدد الثالث.



برهان ذلك: أن عدد ج د يكون عشرة أجزاء وعدد ه ز يكون ثلاثة أجزاء وعدد آ ب يكون ثمانية أجزاء. فإذا أضفنا إلى الثاني – الذي هو ثلاثة أجزاء – نصف الأول، الذي هو خمسة أجزاء، صار ثمانية أجزاء وبقي من الأول خمسة أجزاء. وإذا أضفنا إلى الثالث – الذي هو ثمانية أجزاء – ثلث الثاني الذي هو جزء واحد صار الثالث تسعة أجزاء وبقي الثاني سبعة أجزاء. وإذا أضيف إلى الأول – الذي هو خمسة أجزاء – ربع الثالث الذي هو جزآن، صار الأول سبعة أجزاء، وصار الثالث سبعة أجزاء. فيصير الأعداد بعد الزيادات متساوية، وذلك ما أردنا أن نجد.

وتبيّن من هذا التركيب / أن هذه المسألة سيّالة، لأنها تتم بكل عدد له ثمن؛ وذلك ب – ٨٠ – و
ما أردنا أن نبيّن.

⟨يط⟩ ومن ذلك قولنا: نريد أن نقسم عددين معلومين بثلاث نسب مثل نسب مفروضة.

فليكن العددان آ ب ج د والنسب المفروضة نسبة ه إلى ز ونسبة ح إلى ط ونسبة ك إلى ل. فليكن أعظم النسب نسبة ه إلى ز وأصغر النسب نسبة ك إلى ل.

1 ربعه: اربعه [س] / وليصر: وليصير [ب، س] / ربعه: اربعه [س] – 7 صار: صارت [س] – 10 الذي هو جزآن ... الثالث: مكررة [ب] – 11 وذلك ما ... نجد: ناقصة [ب] – 12 وتبين: ويتبين [س] / تتم: يتم [ب] – 12-13 وذلك ... نبين: ناقصة [س] – 17 فليكن: وليكن [س]

La méthode de l'analyse dans ce problème consistera à supposer que les deux nombres ont été partagés suivant ces rapports, nous examinons ensuite les propriétés de ces deux nombres une fois divisés. Que les deux nombres soient divisés aux points N, M, P, Q. Que le rapport de AM à CP soit égal au rapport de E à G, que le rapport de MN à PQ soit égal au rapport de H à I, que le rapport de NB à QD soit égal au rapport de K à L. Si on examine les propriétés de ces deux nombres après leur division, on trouve que le rapport de AN à CQ est plus petit que le rapport de E à G et plus grand que le rapport de H à I; on trouve que le rapport de MB à PD est plus petit que le
S. 328r rapport de H à I/ et plus grand que le rapport de K à L, et on trouve que le rapport de la somme de AM et MB à la somme de CP et PD est plus petit que le rapport de E à G et plus grand que le rapport de K à L, car cette notion a été montrée dans la proposition 6 de ce traité. Si le rapport de AN à CQ est plus grand que le rapport de H à I, que le rapport de NB à QD est égal au rapport de K à L et que le rapport de K à L est plus petit que le rapport de H à I, alors le rapport de AN à CQ est plus grand que le rapport de NB à QD. Si donc le rapport de AN à CQ est plus grand que le rapport de NB à QD, alors le rapport de AB à CD est plus grand que le rapport de NB à QD, donc il est plus grand que le rapport de K à L. Mais puisque le rapport de AN à CQ est plus petit que le rapport de E à G et que le rapport de NB à QD est égal au rapport de K à L qui est plus petit que le rapport de E à G, chacun des rapports de AN à CQ et de NB à QD est plus petit que le rapport de E à G, donc le rapport de AB à CD est plus petit que le rapport de E à G. Donc le rapport de AB à CD est plus petit que le rapport de E à G et plus grand que le rapport de K à L. Mais le rapport de H à I est plus petit que le rapport de E à G et est plus grand que le rapport de K à L, car le rapport de E à G est le plus grand des trois rapports et le rapport de K à L est le plus petit des trois rapports. S'il en est ainsi, le rapport de AB à CD peut être égal au rapport de H à I ou lui être supérieur ou lui être inférieur.

فطريق التحليل في هذه المسألة يكون بأن نفرض أن العددين قد انقسما بهذه النسب، ثم ننظر في خواص هذين العددين من بعد انقسامهما. وليقسم العددان على نقط ن م ف ق. وليكن نسبة ا م إلى ج ف كنسبة هـ إلى ز ونسبة م ن إلى ف ق كنسبة ح إلى ط ونسبة ن ب إلى ق د كنسبة ك إلى ل. وإذا نُظر في خواص هذين العددين بعد انقسامهما وُجد نسبة ا ن إلى ج ق أصغر من نسبة هـ إلى ز وأعظم من نسبة ح إلى ط، ووجد نسبة م ب إلى ف د أصغر من نسبة ح إلى ط / س – ٣٢٨ – وأعظم من نسبة ك إلى ل، ووجد نسبة ا م م ب مجموعين إلى ج ف ف د مجموعين أصغر من نسبة هـ إلى ز وأعظم من نسبة ك إلى ل، لأن هذا المعنى قد تبيّن في الشكل و من هذه المقالة. وإذا كانت نسبة ا ن إلى ج ق أعظم من نسبة ح إلى ط وكانت نسبة ن ب إلى ق د كنسبة ك إلى ل، وكانت نسبة ك إلى ل أصغر من نسبة ح إلى ط، فإن نسبة ا ن إلى ج ق أعظم من نسبة ن ب إلى ق د، فإذا كانت نسبة ا ن إلى ج ق أعظم من نسبة ن ب إلى ق د، فإن نسبة ا ب إلى ج د أعظم من نسبة ن ب إلى ق د، فهي أعظم من نسبة ك إلى ل. ولأن نسبة ا ن إلى ج ق أصغر من نسبة هـ إلى ز ونسبة ن ب إلى ق د كنسبة ك إلى ل – التي هي أصغر من نسبة هـ إلى ز – يكون كلُّ واحدة من نسبة ا ن إلى ج ق ونسبة ن ب إلى ق د أصغر من نسبة هـ إلى ز، فيكون نسبة ا ب إلى ج د أصغر من نسبة هـ إلى ز. فنسبة ا ب إلى ج د أصغر من نسبة هـ إلى ز وأعظم من نسبة ك إلى ل. ونسبة ح إلى ط هي أصغر من نسبة هـ إلى ز وأعظم من نسبة ك إلى ل، لأن نسبة هـ إلى ز هي أعظم النسب الثلاث ونسبة ك إلى ل هي أصغر النسب الثلاث. وإذا كان ذلك كذلك، فنسبة ا ب إلى ج د يمكن أن تكون كنسبة ح إلى ط ويمكن أن تكون أعظم منها ويمكن أن تكون أصغر منها.

1 المسألة : ناقصة [ب] – 2 ننظر : ينظر [س] / انقسامهما : انقسامها [ب، س] / وليقسم : ولنقسم [ب، س] – 3 ن م : م ن [س] / كنسبة ... ف ق : ناقصة [ب] – 4 ن ب : م ب [ب] – 5 وجد : يوجد [ب، س] / ج ق : جـ ن [ب] – 6 ووجد : ويوجد [ب، س]؛ أثبت الواو فوق السطر [ب] / ف د : ق د [ب] – 7 ووجد : ويوجد [ب، س] / م ب : ن ب [ب، س] / ف د : ق د [ب] – 8 و : ح [ب، س] – 10-12 كنسبة ... ق د : ناقصة [ب] – 12 ق د : ف د [س] / ن ب : ف ب [س] – 15 كل : نسبة كل [ب] / واحدة : واحد [ب] – 16-17 فنسبة ... ز (الأولى) : ناقصة [س] – 19 هي : وهي [ب] – 20 تكون (الثانية) : يكون [س]

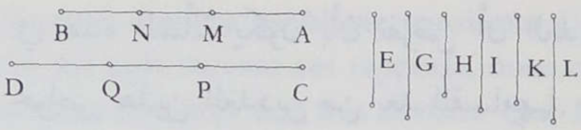


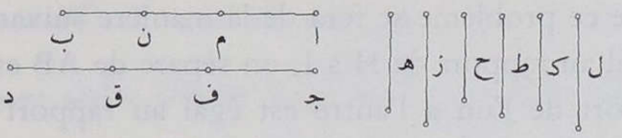
Fig. 32

Si le rapport de AB à CD est égal au rapport de H à I, alors le rapport de MN à PQ est égal au rapport de AB à CD et est égal au rapport du reste au reste, donc le rapport de la somme de AM et NB à la somme de CP et QD est égal au rapport de AB à CD et est égal au rapport de H à I.

Si le rapport de AB à CD est plus grand que le rapport de H à I, lequel est le rapport de MN à PQ, alors le rapport de la somme de AM et NB à la somme de CP et QD est plus grand que le rapport de H à I, tout en étant plus petit que le rapport de E à G et plus grand que le rapport de K à L.

Et si le rapport de AB à CD est plus petit que le rapport de H à I, alors le rapport de la somme de AM et NB à la somme de CP et QD est plus petit que le rapport de H à I, tout en étant plus grand que le rapport de K à L.

L'analyse a donc abouti à ce que le rapport de AB à CD est plus petit que le rapport de E à G et plus grand que le rapport de K à L, et ou bien il est égal au rapport de H à I, ou bien il lui est supérieur, ou bien il lui est inférieur. Si le rapport de AB à CD est égal au rapport de H à I, alors le rapport de la somme de AM et NB à la somme de CP et QD est aussi égal au rapport de H à I. Si le rapport de AB à CD est plus grand que le rapport de H à I, alors le rapport de la somme de AM et NB à la somme de CP et QD est plus grand que le rapport de H à I, tout en étant plus petit que le rapport de E à G. Et si le rapport de AB à CD est plus petit que le rapport de H à I, le rapport de la somme de AM et NB à la somme de CP et QD est plus petit que le rapport de H à I, tout en étant plus grand que le rapport de K à L.



فإن كانت نسبة اب إلى جد كنسبة ح إلى ط، فإن نسبة م ن إلى ف ق هي كنسبة اب إلى جد وكنسبة الباقي إلى الباقي، فيكون نسبة مجموع ام ن ب إلى مجموع ج ف ق د كنسبة اب إلى جد وكنسبة ح إلى ط.

وإن كانت نسبة اب إلى جد أعظم من نسبة ح إلى ط التي هي نسبة م ن إلى ف ق، فإن نسبة مجموع ام ن ب إلى مجموع ج ف ق د أعظم من نسبة ح إلى ط، وهي مع ذلك أصغر من نسبة هـ إلى ز وأعظم من نسبة ك إلى ل.

وإن كانت نسبة اب إلى جد أصغر من نسبة ح إلى ط، فإن نسبة مجموع ام ن ب إلى مجموع ج ف ق د أصغر من نسبة ح إلى ط، وهي مع ذلك أعظم من نسبة ك إلى ل.

فقد انتهى التحليل إلى أن نسبة اب إلى جد أصغر من نسبة هـ إلى ز وأعظم من نسبة ك إلى ل، وهي إما مساوية لنسبة ح إلى ط وإما أعظم وإما أصغر منها؛ ⟨وأن نسبة اب إلى جد إذا كانت مساوية لنسبة ح إلى ط، فإن نسبة ام ن ب مجموعين إلى ج ف ق د مجموعين مساوية لنسبة ح إلى ط،⟩ وأن نسبة اب إلى جد إذا كانت أعظم من نسبة ح إلى ط، فإن نسبة ام ن ب مجموعين إلى ج ف ق د مجموعين أعظم من نسبة ح إلى ط، وهي مع ذلك أصغر من نسبة هـ إلى ز؛ وأن نسبة اب إلى جد إذا كانت أصغر من نسبة ح إلى ط، فإن نسبة ام ن ب مجموعين إلى ج ف ق د مجموعين أصغر من نسبة ح إلى ط، وهي مع ذلك أعظم من نسبة ك إلى ل.

3 ق د : ق و [س] – 5 إلى (الثانية) : ناقصة [ب] – 6 ز : هـ [ب] – 8-9 فإن نسبة ... ط : ناقصة [ب] – 11 أن : ناقصة [ب]

La synthèse de ce problème se fera de la manière suivante : si le rapport de AB à CD est égal au rapport de H à I, on sépare de AB et CD deux nombres tels que le rapport de l'un à l'autre est égal au rapport de H à I, ceci est possible bien qu'indéterminé. Que les deux nombres soient AM et CP, il reste que le rapport de BM à PD est égal au rapport de AB à CD qui est le rapport de H à I. Mais le rapport de H à I est plus petit que le rapport de E à G et plus grand que le rapport de K à L. Nous partageons les deux nombres MB et PD suivant deux rapports égaux aux rapports de E à G et de K à L, comme nous l'avons montré dans la proposition 6 de ce traité. Soient le rapport de MN à PQ égal au rapport de E à G et le rapport de NB à QD égal au rapport de K à L, alors les deux nombres AB et CD ont été divisés suivant les trois rapports donnés.

Si le rapport de AB à CD est plus grand que le rapport de H à I, on se donne un rapport plus petit que le rapport de E à G et plus grand que le
S. 328ᵛ rapport de AB à CD,/ ceci est possible car le rapport de E à G est plus grand que le rapport de AB à CD. Et pour deux rapports différents dont l'un est plus grand que l'autre, il est possible de trouver un troisième rapport plus
B. 80ᵛ petit que le plus grand et plus grand que / le plus petit ; nous montrerons cette notion une fois cette proposition achevée.

Soit le rapport de S à O plus petit que le rapport de E à G et plus grand que le rapport de AB à CD. Le rapport de S à O est donc plus grand que le rapport de H à I et on a le rapport de AB à CD plus petit que le rapport de S à O et plus grand que le rapport de H à I. Nous partageons AB et CD suivant deux rapports égaux aux rapports de S à O et de H à I, comme il a été montré dans la proposition 6 de ce traité. Que le rapport de AN à CQ soit égal au rapport de S à O et le rapport de NB à QD soit égal au rapport de H à I, alors le rapport de AN à CQ est plus petit que le rapport de E à G et plus grand que le rapport de K à L. Nous partageons les deux nombres AN et CQ suivant deux rapports égaux aux rapports de E à G et de K à L. Que le

وتركيب هذه المسألة يكون على هذه الصفة : إن كانت نسبة اب إلى جد كنسبة ح إلى ط، فُصل من اب جد عددان يكون نسبة أحدهما إلى الآخر كنسبة ح إلى ط، وذلك ممكن ومع ذلك سيّال. وليكن العددان ام جف، فيبقى نسبة بم إلى فد كنسبة اب إلى جد، التي هي نسبة ح إلى ط. ونسبة ح إلى ط هي أصغر من نسبة ه إلى ز وأعظم من نسبة ك إلى ل. فنقسم عددي مب فد بنسبتين مساويتين لنسبتي ه إلى ز وك إلى ل، كما بيّنا في الشكل و من هذه المقالة. وليكن نسبة من إلى فق كنسبة ه إلى ز ونسبةُ نب إلى قد كنسبة ك إلى ل، فيكون عددا اب جد قد انقسما بالنسب الثلاث المفروضة.

وإن كانت نسبة اب إلى جد أعظم من نسبة ح إلى ط، فُرضت نسبة أصغر من نسبة ه إلى ز وأعظم من نسبة اب إلى جد، / وذلك ممكن لأن س – ٣٢٨ – و
نسبة ه إلى ز أعظم من نسبة اب إلى جد. وكل نسبتين مختلفتين تكون إحداهما أعظم من الأخرى، فإنه يمكن أن توجد نسبة ثالثة أصغر من العظمى وأعظم من / الصغرى؛ ونحن نبيّن هذا المعنى من بعد فراغنا من هذا الشكل. ب – ٨٠ – ظ
فليكن نسبة س إلى ع أصغر من نسبة ه إلى ز وأعظم من نسبة اب إلى جد. فيكون نسبة س إلى ع أعظم من نسبة ح إلى ط ويكون نسبة اب إلى جد أصغر من نسبة س إلى ع وأعظم من نسبة ح إلى ط. فنقسم اب جد بنسبتين مساويتين لنسبتي س إلى ع وح إلى ط، كما تبيّن في الشكل و من هذه المقالة. وليكن نسبة ان إلى جق كنسبة س إلى ع ونسبة نب إلى قد كنسبة ح إلى ط، فيكون نسبة ان إلى جق أصغر من نسبة ه إلى ز وأعظم من نسبة ك إلى ل. فنقسم عددي ان جق بنسبتين مساويتين لنسبتي ه إلى ز

2 كنسبة : وكنسبة [س] / عددان : عددين [ب، س] – 4 ب م : م ب [س] – 5 ط ... ك إلى: ناقصة [س] – 6 ف د : ق د [ب] / مساويتين : متساويتين [س] – 7 و: ز [ب، س] – 11 ج د : كتب بعدها «اعظم من نسبة ه إلى ز واعظم من نسبة اب إلى جـ د» [ب] – 13 إحداهما : احدهما [ب] – 14 المعنى : ناقصة [ب] – 18 مساويتين : متساويتين [س] / س إلى ع : س ع [ب] / وح إلى ط : وح ط [ب] – 21 من : ناقصة [ب]

rapport de AM à CP soit égal au rapport de E à G et le rapport de MN à PQ soit égal au rapport de K à L. Les deux nombres AB et CD ont donc été divisés suivant les trois rapports donnés.

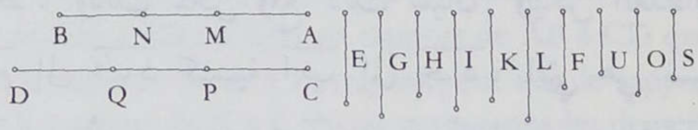


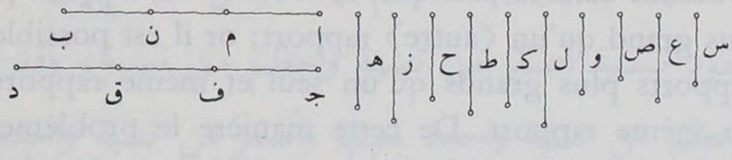
Fig. 33

Si le rapport de AB à CD est plus petit que le rapport de H à I, on se donne un rapport plus petit que le rapport de AB à CD et plus grand que le rapport de K à L. Soit le rapport de U à F plus petit que le rapport de AB à CD et plus grand que le rapport de K à L. Le rapport de AB à CD est donc plus petit que le rapport de H à I et plus grand que le rapport de U à F. Nous partageons AB et CD suivant deux rapports égaux aux rapports de U à F et de H à I. Que le rapport de AN à CQ soit égal au rapport de U à F et que le rapport de NB à QD soit égal au rapport de H à I; mais le rapport de U à F est plus petit que le rapport de AB à CD et le rapport de AB à CD est plus petit que le rapport de E à G, donc le rapport de U à F est plus petit que le rapport de E à G. Mais le rapport de U à F est plus grand que le rapport de K à L, donc le rapport de AN à CQ est plus petit que le rapport de E à G et plus grand que le rapport de K à L. Partageons AN et CQ suivant les deux rapports égaux aux deux rapports de E à G et de K à L. Que le rapport de AM à CP soit égal au rapport de E à G et que le rapport de MN à PQ soit égal au rapport de K à L. Les deux nombres AB et CD ont donc été partagés suivant les trois rapports donnés.

On a donc montré, à partir de tout ce que nous avons exposé, comment partager deux nombres AB et CD suivant les trois rapports donnés. Ce qu'il fallait faire.

On a en outre montré que ce problème est indéterminé, c'est-à-dire qu'il peut être résolu de plusieurs manières: en effet si le rapport de AB à CD est égal au rapport de H à I, alors étant donnée une partie quelconque du nombre

وكَ إلى لَ. وليكن نسبة ا م إلى جـ ف كنسبة هـ إلى ز ونسبة م ن إلى ف ق كنسبة ك إلى ل. فيكون عددا ا ب جـ د قد انقسما بالنسب الثلاث المفروضة.



وإن كانت نسبة ا ب إلى جـ د أصغر من نسبة ح إلى ط، فُرِضت نسبة أصغر من نسبة ا ب إلى جـ د وأعظم من نسبة ك إلى ل. فليكن نسبة ص إلى و أصغر من نسبة ا ب إلى جـ د وأعظم من نسبة ك إلى ل. فيكون نسبة ا ب إلى جـ د أصغر من نسبة ح إلى ط وأعظم من نسبة ص إلى و. فنقسم ا ب جـ د بنسبتين مساويتين لنسبتي ص إلى و وح إلى ط. وليكن نسبة ا ن إلى جـ ق كنسبة ص إلى و ونسبة ن ب إلى ق د كنسبة ح إلى ط؛ ونسبة ص إلى و أصغر من نسبة ا ب إلى جـ د ونسبة ا ب إلى جـ د أصغر من نسبة هـ إلى ز، فنسبة ص إلى و أصغر من نسبة هـ إلى ز. ونسبة ص إلى و أعظم من نسبة ك إلى ل، فنسبة ا ن إلى جـ ق أصغر من نسبة هـ إلى ز وأعظم من نسبة ك إلى ل. فنقسم ا ن جـ ق بنسبتين مساويتين لنسبتي هـ إلى ز وك إلى ل. وليكن نسبة ا م إلى جـ ف كنسبة هـ إلى ز، ونسبة م ن إلى ف ق كنسبة ك إلى ل. فيكون عددا ا ب جـ د قد انقسما بالنسب الثلاث المفروضة.

فقد تبيّن من جميع ما ذكرناه كيف نقسم عددي ا ب جـ د بالنسب الثلاث المفروضة؛ وذلك ما أردنا أن نعمل.

وقد تبيّن مع ذلك أن هذه المسألة سيّالة، أعني أنها يمكن أن تُعمل بعدة وجوه؛ وذلك أن نسبة ا ب إلى جـ د إذا كانت كنسبة ح إلى ط، فإن أي جزء

1 وكَ إلى لَ: فنقسم دك إلى ل [س] / جـ ف: حـ ق [ب] – 4-5 فليكن ... كَ إلى لَ: ناقصة [س] – 5 وَ: قَ [ب] – 6 وَ: دَ [س] / فنقسم: فيقسم [س] – 7 وَ: كتب ناسخ [س] الواو دالاً، ولن نشير إليها فيما بعد – 8 كنسبة ... ق د: ناقصة [ب] – 13 جـ ف: حـ ق [ب] – 15 ذكرناه: ذكرنا [ب، س] / نقسم: يقسم [س] / عددي: عدد [ب] عددا [س] – 17-18 تعمل بعدة وجوه: يوجد بوجوه عدة [س] – 18 فإن: فانه [ب]

AB, si on fait son rapport à une partie du nombre CD égal au rapport de H à I, on achève le problème.

Si le rapport de AB à CD est plus grand ou plus petit que le rapport de H à I, alors on a besoin dans la pratique de trouver un rapport plus petit qu'un rapport et plus grand qu'un ⟨autre⟩ rapport; or il est possible de trouver de nombreux rapports plus grands qu'un seul et même rapport et plus petits qu'un seul et même rapport. De cette manière le problème est également indéterminé. Dans tous les cas, il est possible que les deux nombres se partagent suivant les trois rapports de nombreuses manières.

Cependant ce problème est ⟨objet⟩ de discussion, car il ne peut être achevé que lorsque le rapport des deux nombres l'un à l'autre est plus petit que le plus grand rapport et plus grand que le plus petit rapport. Si on suppose que
S. 329r le rapport / des deux nombres n'est pas plus petit que le plus grand rapport et n'est pas plus grand que le plus petit rapport, il s'ensuit l'impossible. Et l'impossible qui s'ensuit dans cette proposition est comme l'impossible qui s'ensuivait dans la proposition 6 de ce traité. La discussion dans cette proposition est la même que la discussion dans la proposition 6.

Quant à la manière de trouver un rapport plus petit qu'un rapport et plus grand qu'un rapport, ceci se fait comme nous allons le décrire: que le plus grand des deux rapports soit le rapport de AB à CD et que le plus petit soit le rapport de EG à HI. Posons le rapport de EG à IL égal au rapport de AB à CD, donc le rapport de EG à IL est plus grand que le rapport de EG à HI, IL est donc plus petit que HI. Séparons de HL, HN quelconque, le rapport de EG à IN sera donc plus petit que le rapport de AB à CD et plus grand que le rapport de EG à HI.

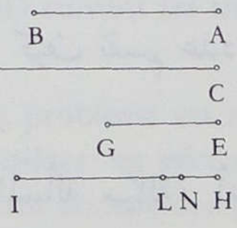


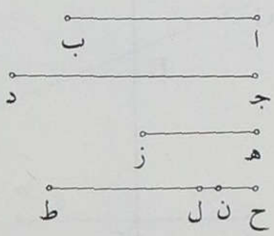
Fig. 34

فُرض من عدد ا ب وجُعلت نسبته إلى جزء من عدد جـ د كنسبة ح إلى ط تمت المسألة.

وإذا كانت نسبة ا ب إلى جـ د أعظم أو أصغر من نسبة ح إلى ط، فإنه يُحتاج في العمل إلى وجود نسبةٍ أصغر من نسبةٍ وأعظم من نسبةٍ، وقد يمكن أن توجد نسب كثيرة أعظم من نسبة واحدة بعينها وأصغر من نسبة واحدة بعينها، فتكون المسألة على هذا الوجه أيضاً سيّالة. فعلى تصاريف الأحوال يمكن أن ينقسم العددان بالنسب الثلاث بعدة وجوه.

إلّا أن هذه المسألة محدودة، لأنه ليس يمكن أن تتم إلا بعد أن تكون نسبة العددين أحدهما إلى الآخر أصغر من أعظم النسب وأعظم من أصغر النسب. وإن فرضت نسبة / العددين ليست أصغرَ من أعظم النسب وأعظمَ من أصغر النسب لزم منه المحال. ولزوم المحال في هذا الشكل مثل المحال الذي لزم في الشكل وَ من هذه المقالة، فتحديد هذا الشكل هو تحديد الشكل وَ بعينه. س - ٣٢٩ - و

فأما كيف توجد نسبة أصغر من نسبةٍ وأعظم من نسبةٍ فإنه يكون كما نصف: ليكن أعظم النسبتين نسبة ا ب إلى جـ د وأصغرهما نسبة هـ ز إلى ح ط، فنجعل نسبة هـ ز إلى ط ل كنسبة ا ب إلى جـ د، فتكون نسبة هـ ز إلى ط ل أعظم من نسبة هـ ز إلى ح ط، فيكون ط ل أصغر من ح ط. فنفصل من ح ل ح ن كيفما اتفق، فيكون نسبة هـ ز إلى ط ن أصغر من نسبة ا ب إلى جـ د وأعظم من نسبة هـ ز إلى ح ط.



1 جـ د كنسبة: جـ وكنسبة [س] – 5 وأصغر ... بعينها: ناقصة [ب] – 6 الوجه: الفرض [س] – 8 تتم: يتم [س] – 9 أصغر (الأولى): ناقصة [ب] – 10 العددين: العدد [س] – 11 منه: ناقصة [ب] / المحال (الأخيرة): المثالى [س] / وَ: حَ [ب، س] – 12 وَ: حَ [ب] الثامن [س]

Si le nombre HL est un, nous multiplions tous les nombres autant que nous voulons jusqu'à ce qu'il vienne un nombre entier à la place de HL. Les multiples des nombres seront suivant les rapports des premiers nombres. De même, s'il y a des fractions dans l'un des nombres donnés pour les deux rapports, nous multiplions tous les nombres par le nombre homonyme de la fraction, alors les rapports seront des rapports de nombres entiers. C'est de cette manière qu'on peut trouver un rapport plus petit qu'un rapport donné et plus grand qu'un rapport donné. Cet ensemble de problèmes numériques est suffisant pour s'exercer.

⟨20⟩ Quant aux problèmes géométriques, ils sont à l'exemple de notre énoncé: une droite AB étant donnée, sur laquelle il y a trois points qui sont
B. 81r A, B et C et une droite DG, étant de position connue et illimitée,/ nous voulons mener des deux points A et B deux droites qui se rencontrent en un point de DG tel que si l'on mène du point C une droite passant par ce point, elle partage en deux moitiés l'angle engendré en ce point.

Par la méthode de l'analyse nous supposons que ceci a été obtenu et que les droites sont AE, BE et CE. L'angle AEC sera donc égal à l'angle CEB. Puisque l'angle AEB a été partagé en deux moitiés par la droite EC, le rapport de AE à EB est égal au rapport de AC à CB.

Si AC est égal à CB, alors CE est une perpendiculaire et elle a été menée du point C connu, à la droite AB. La droite EC est donc de position connue comme il a été montré dans la vingt-huitième proposition des *Données* et la droite DG est de position connue par hypothèse. Les deux droites DG et EC sont donc de position connue et elles se coupent au point E, donc le point E est connu comme il a été montré dans la proposition 24 des *Données*.

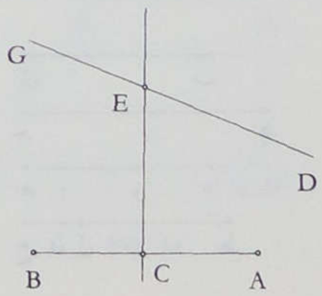


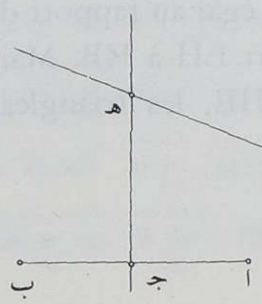
Fig. 35

فإن كان عدد ح ل واحداً أضعفنا جميع الأعداد أضعافاً كم شئنا إلى أن يصير مكان ح ل عدد صحيح. ويكون أضعاف الأعداد على نسبة الأعداد الأول. وكذلك إن كان في أحد الأعداد المفروضة للنسبتين كسور، ضربنا جميع الأعداد في العدد السميّ للكسر، فتصير النسب في أعداد صحاح. فعلى هذه الصفة يمكن أن توجد نسبة أصغر من نسبة مفروضة وأعظمُ من نسبة مفروضة. وهذا القدر من المسائل العددية مقنع في الرياضة.

〈ك〉 فأما المسائل الهندسية فمثل قولنا: خط ا ب مفروض وعليه ثلاث نقط وهي ا ب ج، وخط د ز معلوم الوضع غير متناهٍ، / ونريد أن نخرج من نقطتي ا ب خطين ب - ٨١ - و يلتقيان على نقطة من د ز، وإذا أخرج من نقطة ج خط إلى تلك النقطة، قسم الزاوية التي حدثت عند تلك النقطة بنصفين.

فعلى طريق التحليل نفرض أن ذلك قد كان، وهي خطوط ا ه ب ه ج ه. فيكون زاوية ا ه ج مثل زاوية ج ه ب. فلأن زاوية ا ه ب قد انقسمت بنصفين بخط ه ج، يكون نسبة ا ه إلى ه ب كنسبة ا ج إلى ج ب.

فإن كان ا ج مثل ج ب، فإن ج ه عمود وقد خرج من نقطة ج المعلومة من خط ا ب. فخط ه ج معلوم الوضع، كما تبيّن في الشكل الثامن والعشرين من المعطيات، وخط د ز بالفرض معلوم الوضع. فخطا د ز ه ج معلوما الوضع، وقد تقاطعا على نقطة ه، فنقطة ه معلومة، كما تبيّن في الشكل كد من المعطيات.



2 ح ل: ح [ب] ح و [س] / عدد صحيح: عددا صحيحا [ب، س] – 7 فمثل قولنا: فان منها [س] – 8 ج: ح [ب] – 14 من (الثانية): ناقصة [س] – 15 ه ج: ج ه [س] ليس هذا الشكل في المخطوطتين

La synthèse de ce cas consiste à mener du point C une perpendiculaire à AB, que l'on prolonge jusqu'à ce qu'elle rencontre la droite DG. De là où elle rencontre la droite DG on mène deux droites aux points A et B et le problème s'achève.

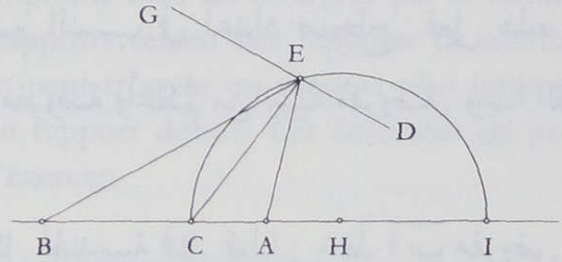
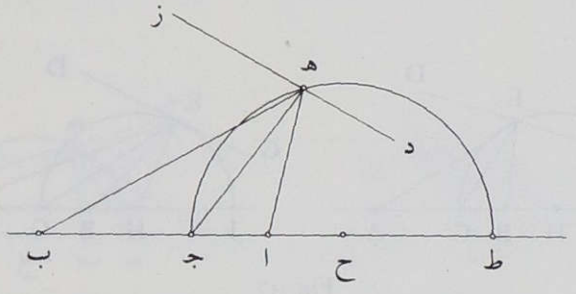


Fig. 36

Si les deux droites AC et CB sont différentes, que AC soit la plus grande, alors le rapport de AE à EB est un rapport connu puisqu'il est égal au rapport de AC à CB toutes les deux connues, et il est le rapport du plus grand au plus petit. Le point E est donc sur la circonférence d'un cercle de position connue comme il a été montré dans la première proposition de ce traité. Que le cercle soit le cercle ECI, donc le cercle ECI est de position connue, mais la droite DG est de position connue, ils se sont coupés au point E, donc le point E est connu comme il a été montré dans la proposition 24 des *Données*.

La synthèse de ce problème se fera comme nous allons le décrire: posons le rapport de CH à HB égal au rapport de AC à CB, donc le rapport de AH tout entier à HC tout entier est égal au rapport de CH à HB. Posons HB et posons H comme centre et traçons à la distance HC un cercle, soit le cercle CEI, que
S. 329v ce cercle coupe / la droite DG au point E; joignons AE, BE, CE et HE, HE est égal à HC, donc le rapport de AH à HE est égal au rapport de AH à HC, mais le rapport de AH à HC est égal au rapport de CH à HB, donc le rapport de AH à HE est égal au rapport EH à HB. Mais l'angle AHE est commun aux deux triangles AHE et BHE, les triangles AHE et BHE sont donc

وتركيب هذا الوضع يكون بأن يخرج من نقطة ج عمود ⟨على ا ب⟩ وينفذ على استقامة إلى أن يلقى خط د ز. فحيث لقي خط د ز أخرج إليه خطان من نقطتي ا ب، وقد تمت المسألة.



وإن كان خطا ا ج ج ب مختلفين، فليكن أعظمهما ا ج، فيكون نسبة ا هـ إلى هـ ب نسبة معلومة، لأنها كنسبة ا ج إلى ج ب المعلومين، وهي نسبة أعظمَ إلى أصغرَ. فنقطة هـ على محيط دائرة معلومة الوضع، كما تبيّن في الشكل الأول من هذه المقالة. فلتكن الدائرة دائرة هـ ج ط، فدائرة هـ ج ط معلومة الوضع، وخط د ز معلوم الوضع، وقد تقاطعا على نقطة هـ، فنقطة هـ معلومة، كما تبيّن في الشكل كد من المعطيات.

وتركيب هذه المسألة يكون كما نصف: نجعل نسبة ج ح إلى ح ب كنسبة ا ج إلى ج ب، فيكون نسبة جميع ا ح إلى جميع ح ج كنسبة ج ح إلى ح ب. ونجعل ح ب، ونجعل ح مركزاً وندير ببعد ح ج دائرة ولتكن دائرة ج هـ ط، ولتقطع هذه الدائرة / خط د ز على نقطة هـ، ونصل ا هـ ب هـ ج هـ ح هـ، فيكون ح هـ مثل س – ٣٢٩ – ظ
ح ج، فيكون نسبة ا ح إلى ح هـ هي نسبة ا ح إلى ح ج، ونسبة ا ح إلى ح ج هي نسبة ج ح إلى ح ب، فنسبة ا ح إلى ح هـ كنسبة هـ ح إلى ح ب. وزاوية ا ح هـ مشتركة لمثلثي ا ح هـ ب ح هـ، فمثلثا ا ح هـ ب ح هـ متشابهان. فنسبة ا ح إلى ح هـ

2-1 على استقامة إلى أن: حتى [ب] – 2 لقي: بقي [س] – 4 مختلفين: مختلفتين [س] / أعظمهما: أعظمها [س] / نسبة: ناقصة [س] – 5 لأنها: لأنهما [ب] – 7 هـ ج ط (الأولى والثانية): هـ ح ط [س] – 8 كد: ك [ب، س] – 12-11 ونجعل ح ب: ناقصة [ب] – 12 ج هـ ط: ح هـ ط [س] – 14 هي: المخطوطة متآكلة في هذا الموضع [س] / إلى ح ج (الأولى): ناقصة [ب] – 16 فمثلثا ا ح هـ ب ح هـ: ناقصة [ب]

semblables. Donc le rapport de AH à HE est égal au rapport de AE à EB, mais le rapport de AH à HE est égal au rapport de AH à HC et est égal au rapport de AC à CB, donc le rapport de AE à EB est égal au rapport de AC à CB, donc l'angle AEB a été partagé en deux moitiés par la droite CE, comme il a été montré dans le sixième livre de l'ouvrage d'Euclide. Ce qu'il fallait faire.

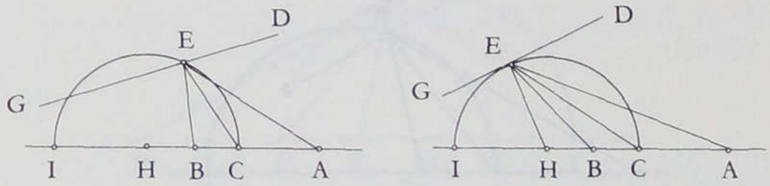


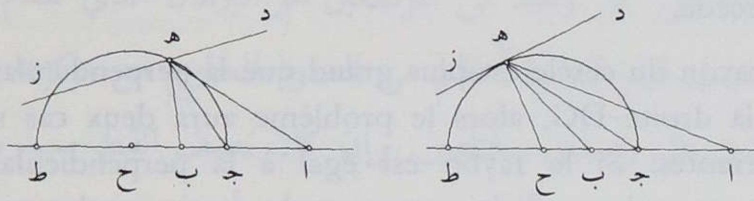
Fig. 37

Ce problème nécessite une discussion car le cercle CI ne rencontre peut-être pas la droite DG et la discussion dans ce problème est que la droite HC n'est pas plus petite que la perpendiculaire menée du point H à la droite DG, car HC est le rayon du cercle et le point H est le centre du cercle. Si le rayon du cercle est plus petit que la perpendiculaire menée de son centre à la droite DG, alors l'extrémité de la perpendiculaire sera à l'extérieur de la circonférence du cercle. Mais l'extrémité de cette perpendiculaire est le point de la droite DG le plus proche de la circonférence du cercle, donc aucune droite menée du centre du cercle à sa circonférence ne parvient à la droite DG.

Si donc le rayon du cercle est plus petit que la perpendiculaire menée de son centre à la droite DG, ce problème ne s'achève pas.

Si le rayon du cercle est égal à la perpendiculaire menée du centre à la droite DG, alors ce problème s'achève et il y a un seul cas, comme dans l'exemple de la première figure. En effet, si le rayon du cercle est égal à la perpendiculaire et si on mène du centre du cercle, qui est le point H, la perpendiculaire HE, alors HE sera le rayon du cercle, la droite DG sera tangente au cercle au point E et le cercle ne rencontrera la droite DG en aucun autre point.

كنسبة ا هـ إلى هـ ب ، ونسبة ا ح إلى ح هـ هي كنسبة ا ح إلى ح ج وكنسبة ا ج إلى ج ب ، فنسبة ا هـ إلى هـ ب كنسبة ا ج إلى ج ب ، فزاوية ا هـ ب قد انقسمت بخط ج هـ بنصفين، كما تبيّن في المقالة السادسة من كتاب أقليدس؛ وذلك ما أردنا أن نعمل.



وهذه المسألة تحتاج إلى تحديد، لأن دائرة ج ط ربما لم تلق خط د ز، وتحديد هذه المسألة هو أن يكون خط ح ج ليس بأصغر من العمود الخارج من نقطة ح القائم على خط د ز على زوايا قائمة، لأن ح ج هو نصف قطر الدائرة ونقطة ح مركز الدائرة. فإذا كان نصف قطر الدائرة أصغر من العمود الخارج من مركزها إلى خط د ز، فإن طرف العمود يكون خارجاً عن محيط الدائرة. وطرف هذا العمود هو أقرب نقطة على خط د ز من محيط الدائرة، فيكون كل خط يخرج من مركز الدائرة إلى محيطها لا يصل إلى خط د ز.

فإذا كان نصف قطر الدائرة أصغر من العمود الخارج من مركزها إلى خط د ز، فليس تتم هذه المسألة.

وإن كان نصف قطر الدائرة مساوياً للعمود الخارج من المركز 〈إلى خط د ز〉، فإن هذه المسألة تتم وتقع مرة واحدة على مثل الصورة الأولى. وذلك أنه إذا كان نصف قطر الدائرة مساوياً للعمود وخرج من مركز الدائرة – الذي هو نقطة ح – عمود ح هـ ، كان ح هـ نصف قطر الدائرة، وكان خط د ز يماس الدائرة على نقطة هـ ، فليس يلقى الدائرة خط د ز على نقطة أخرى.

1 ح ج وكنسبة ا ج إلى : ناقصة [ب] – 2 ج ب : ج ب ا [س] / ا ج : ا ح [ب] – 5 وهذه : وهذا [س] / ج ط : هـ ج ط [س] / ربما : بما [س] – 6 ح ج : ج ح [ب] / القائم : للقائم [ب] – 7 فإذا : واذا [س] – 8 من العمود الخارج : مكررة [ب]

Si le rayon du cercle est plus grand que la perpendiculaire, alors si on mène du centre du cercle une perpendiculaire à la droite DG qui aboutit ensuite à la circonférence du cercle, alors la droite DG coupe cette droite qui est le rayon du cercle et qui est perpendiculaire, elle coupe donc le cercle en deux positions. Si on mène à chacune de ces deux positions des droites à partir des B. 81ᵛ points A, C et B l'angle qui est engendré en cette / position se partage en deux moitiés. La démonstration pour chacune de ces deux positions est la démonstration qui précède.

Si donc le rayon du cercle est plus grand que la perpendiculaire menée de son centre à la droite DG, alors le problème aura deux cas suivant deux positions différentes. Si le rayon est égal à la perpendiculaire, alors le problème aura un seul cas. Si le rayon est plus petit que la perpendiculaire, alors le problème ne s'achève pas. Ceci est la discussion dans ce problème.

⟨21⟩ Parmi ces exemples, notre énoncé : le point A étant donné, la droite BC étant donnée de position connue et le cercle DE étant donné, nous voulons mener du point A une droite au cercle DE que l'on incline suivant un angle connu pour qu'elle aboutisse à la droite BC, de sorte que le rapport de l'une à l'autre des deux droites engendrées soit connu.

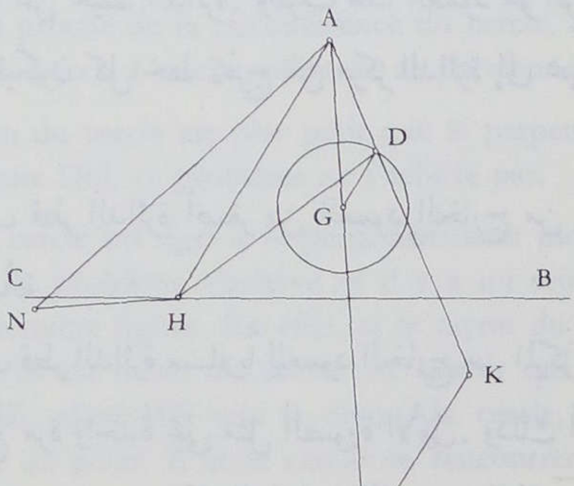
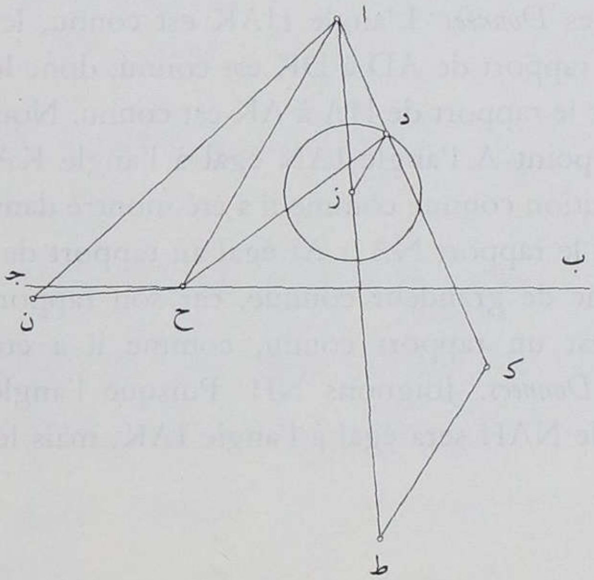


Fig. 38

وإن كان نصف قطر الدائرة أعظم من العمود، فإنه إذا خرج من مركز الدائرة عمود على خط د ز ثم انتهى إلى محيط الدائرة، كان خط د ز يقطع الخط الذي هو نصف قطر الدائرة الذي هو عمود، فهو يقطع الدائرة في موضعين. وكل واحد من الموضعين إذا خرج إليه خطوط من نقط ا ج ب، انقسمت الزاوية التي تحدث عند ذلك / الموضع ب - ٨١ - ظ بنصفين. والبرهان على كل واحد من الموضعين هو البرهان الذي تقدم.

فإذا كان نصف قطر الدائرة أعظم من العمود الخارج من مركزها إلى خط د ز، فالمسألة تقع مرتين على وضعين مختلفين. وإن كان نصف القطر مساوياً للعمود، فإن المسألة تقع مرة واحدة. وإن كان نصف قطر الدائرة أصغر من العمود، فإن المسألة لا تتم. وهذا هو تحديد هذه المسألة.

⟨كا⟩ ومنها قولنا: نقطة ا مفروضة، وخط ب ج معلوم الوضع مفروض، ودائرة د ه مفروضة، ونريد أن نخرج من نقطة ا خطاً إلى دائرة د ه ونعطفه على زاوية معلومة حتى ينتهي إلى خط ب ج ويكون نسبة الخطين الحادثين أحدهما إلى الآخر معلومة.



4 خرج: وهو جائز وإن كان الأفصح «خرجت» لأن الفاعل جمع تكسير، ولن نشير إلى مثلها فيما بعد – 7-8 القطر ... الدائرة: ناقصة [س] – 9 هذه: ناقصة [ب] – 10 نقطة: مكررة [س] – 11 د ه: د ر [ب] / خطًا: خط [ب]

La méthode de l'analyse est de supposer que cette notion a été réalisée, c'est-à-dire qu'on a trouvé les deux droites AD et DH, que l'angle ADH est connu et que le rapport de AD à DH est connu. Désignons le centre du cercle, soit G, prolongeons AD et posons DK égal à DH, alors le rapport de AD à DK est connu, le point K est donc sur la circonférence d'un cercle de position connue, comme il a été montré dans la deuxième proposition de ce traité. En effet, joignons AG, elle sera de grandeur et de position connues, car ses deux extrémités sont connues comme il a été montré dans la proposition 25 des *Données*. Prolongeons AG et posons le rapport de AG à GI égal au
S. 330r rapport de AD / à DK qui est connu, la droite GI sera donc de grandeur connue, comme il a été montré dans la proposition 2 des *Données*, et il est de position connue, donc le point I est connu comme il a été montré dans la proposition 26 des *Données*. Joignons GD et IK, elles seront parallèles car le rapport de AG à GI est égal au rapport de AD à DK, donc le triangle AIK est semblable au triangle AGD. Le rapport de IK à GD est donc égal au rapport de IA à AG, mais le rapport de IA à AG est connu, donc le rapport de IK à GD est connu. IK est donc connue et le point I est connu, donc le point K est sur la circonférence d'un cercle de grandeur et de position connues. Joignons AH, le triangle ADH est de forme connue car le rapport de AD à DH est connu et l'angle ADH est connu comme il a été montré dans la proposition 39 des *Données*. L'angle HAK est connu, le rapport de HA à AD est connu et le rapport de AD à DK est connu, donc le rapport de AD à AK est connu, donc le rapport de HA à AK est connu. Nous construisons sur la droite AI à son point A l'angle IAN égal à l'angle KAH qui est connu, donc AN est de position connue comme il a été montré dans la proposition 28 des *Données*. Posons le rapport NA à AI égal au rapport de HA à AK qui est connu, AN est donc de grandeur connue, car son rapport à AI qui est de grandeur connue est un rapport connu, comme il a été montré dans la proposition 2 des *Données*. Joignons NH. Puisque l'angle IAN est égal à l'angle KAH, l'angle NAH sera égal à l'angle IAK, mais le rapport de NA à

فطريق التحليل هو أن نفرض أن هذا المعنى قد تمّ وهو ⟨أن وُجد⟩ خطا ا د د ح، وأن زاوية ا د ح معلومة ونسبة ا د إلى د ح معلومة. ونحدّ مركز الدائرة وليكن ز، ونخرج ا د على استقامة ونجعل د ك مثل د ح، فيكون نسبة ا د إلى د ك معلومة، فنقطة ك على محيط دائرة معلومة الوضع، كما تبيّن في الشكل الثاني من هذه المقالة. وذلك أنا نصل ا ز، فيكون معلوم القدر والوضع، لأن نهايتيه معلومتان، كما تبيّن في الشكل كه من المعطيات. ونخرج ا ز على استقامة، ونجعل نسبة ا ز إلى ز ط كنسبة ا د / إلى د ك المعلومة، فيكون خط ز ط معلوم القدر، س - ٣٣٠ - و
كما تبيّن في الشكل ب من المعطيات، وهو معلوم الوضع، فنقطة ط معلومة، كما تبيّن في الشكل كو من المعطيات. ونصل ز د ط ك فيكونان متوازيين، لأن نسبة ا ز إلى ز ط كنسبة ا د إلى د ك، فيكون مثلث ا ط ك شبيهاً بمثلث ا ز د، فنسبة ط ك إلى ز د كنسبة ط ا إلى ا ز، ونسبة ط ا إلى ا ز معلومة، فنسبة ط ك إلى ز د معلومة. فـ ط ك معلوم ونقطة ط معلومة فنقطة ك على محيط دائرة معلومة القدر والوضع. ونصل ا ح، فيكون مثلث ا د ح معلوم الصورة، لأن نسبة ا د إلى د ح معلومة وزاوية ا د ح معلومة، كما تبيّن في الشكل لط من المعطيات. فزاوية ح ا ك معلومة ونسبة ح ا إلى ا د معلومة، ونسبة ا د إلى د ك معلومة، فنسبة ا د إلى ا ك معلومة، فنسبة ح ا إلى ا ك معلومة. فنعمل على خط ا ط – على نقطة ا منه – زاوية ط ا ن مساوية لزاوية ك ا ح المعلومة، فيكون ا ن معلوم الوضع، كما تبيّن في الشكل كح من المعطيات. ونجعل نسبة ن ا إلى ا ط كنسبة ح ا إلى ا ك المعلومة، فيكون ا ن معلوم القدر، لأن نسبته إلى ا ط – المعلوم القدر – نسبة معلومة، كما تبيّن في الشكل ب من المعطيات. ونصل ن ح. فلأن زاوية ط ا ن مثل زاوية ك ا ح تكون زاوية ن ا ح مثل زاوية ط ا ك، ونسبة ن ا إلى

2 د ح : د حـ [ب] / ا د ح : ا د هـ ح [س] – 9 فيكونان : فيكون ان [س] – 10 بمثلث : المثلث [س] – 13 ا ح : ا جـ [س] – 15 ح ا ك : جـ ا ك [ب] / ح ا : ح [ب] – 17 ط ا ن : ط ا ب [ب] – 19-20 نسبته ... في : ناقصة [س] / ن ح : ر ح [س] – 21 ط ا ن : ط ا ب [ب]

AI est égal au rapport de HA à AK, donc le rapport de NA à AH est égal au rapport de IA à AK. Le triangle NAH est donc semblable au triangle IAK, leurs côtés sont donc proportionnels, le rapport de NH à IK est donc égal au rapport de HA à AK, mais le rapport de HA à AK est connu, donc le rapport de NH à IK est connu, or IK est de grandeur connue, donc NH est de grandeur connue, comme il a été montré dans la proposition 2 des *Données*. Mais le point N est connu, car AN est de grandeur et de position connues. Alors la droite NH est de grandeur connue, et le point N est de position connue, donc le point H est sur la circonférence d'un cercle de position connue, comme il a été montré dans la proposition 3 de ce traité.

L'analyse a donc abouti à une notion possible.

Il est possible d'analyser ce problème par une méthode plus brève que celle-ci: on joint la droite AH, alors le triangle AHD sera de forme connue, car le rapport de AD à DH est connu et l'angle ADH est connu, donc le rapport de AH à AD est connu. Mais le point A est connu et la droite BC est de position connue, et on a mené du point A une droite AH qui est inclinée suivant un angle connu qui est l'angle HAD de façon que le rapport de AH à AD devienne connu, donc le point D est sur une droite de position connue
B. 82r comme il a été montré / dans la proposition 3 de ce traité.

La synthèse de ce problème à partir de la première analyse se fera de la manière suivante: soient A le point donné, BC la droite donnée et DE le cercle donné, l'angle connu, l'angle GHI et le rapport connu, le rapport de K à L. Supposons sur l'un des deux côtés[22] de l'angle le point G et posons le rapport de GH à HI égal au rapport de K à L. Joignons GI, et prolongeons GH jusqu'à M et posons HM égal à HI. Désignons le centre du cercle, soit N; joignons AN et prolongeons-la; posons le rapport de AN à NP égal au rapport de GH à HM et posons le rapport de PQ au rayon du cercle égal au

22. Littéralement: droites.

اط هي كنسبة حا إلى اك، فنسبة نا إلى اح كنسبة طا إلى اك. فمثلث ناح شبيه بمثلث طاك، فأضلاعهما متناسبة، فنسبة نح إلى طك كنسبة حا إلى اك، ونسبة حا إلى اك معلومة، فنسبة نح إلى طك معلومة، وطك معلوم القدر، فنح معلوم القدر، كما تبيّن في الشكل ب من المعطيات. ونقطة ن معلومة، لأن ان معلوم القدر والوضع، فخط نح معلوم القدر، ونقطة ن معلومة الوضع، فنقطة ح على محيط معلومة الوضع، كما تبيّن في الشكل جـ من هذه المقالة.

فقد انتهى التحليل إلى معنى ممكن.

وقد يمكن أن نحلل هذه المسألة بطريق أقصر من هذا الطريق وهو أن نصل خط اح، فيكون مثلث احد معلوم الصورة، لأن نسبة اد إلى دح معلومة وزاوية ادح معلومة، فنسبة اح إلى اد معلومة. ونقطة ا معلومة وخط بجـ معلوم الوضع، وقد خرج من نقطة ا خط اح وانعطف على زاوية معلومة وهي زاوية حاد وصارت نسبة اح إلى اد معلومة، فنقطة د على خط مستقيم معلوم الوضع، كما تبيّن / في الشكل جـ من هذه المقالة. ب – ٨٢ – و

وتركيب هذه المسألة عن التحليل الأول يكون على هذه الصفة: ليكن النقطة المفروضة ا والخط المفروض بجـ والدائرة المفروضة ده والزاوية المعلومة زاوية زحط والنسبة المعلومة نسبة ك إلى ل، ونفرض على أحد خطي الزاوية نقطة ز، ونجعل نسبة زح إلى حط كنسبة ك إلى ل. ونصل زط، ونخرج زح إلى م، ونجعل حم مثل حط، ونجد مركز الدائرة وليكن ن، ونصل ان ونخرجه على استقامة، ونجعل نسبة ان إلى نف كنسبة زح إلى حم، ونجعل نسبة فق إلى نصف قطر الدائرة كنسبة فا

1 حا: جا [ب] – 3 نح: نجـ [ب] – 5 ونقطة (الثانية): فنقطة [ب] – 9 أقصر: اخير [ب] اخصر [س] – 10 احد: احر [ب] احو [س] – 11 اد: حد [ب] حد [س] / ونقطة: فنقطة [ب، س] – 12 حاد: جاد [ب] احد [س] / اد: حد [س] حد [ب] – 13 فنقطة: ونقطة [س] – 19 ونجد: ونجد [س] / ان (الأولى): كتب اك ثم أثبت «ن» فوق السطر [ب] – 20 نف: ند [س]

rapport de PA à AN. Construisons au point A l'angle PAJ égal à l'angle MGI et posons le rapport de JA à AP égal au rapport de IG à GM et posons le S. 330v rapport de JF à PQ égal au rapport de JA à AP. Posons J comme centre / et traçons avec la distance JF un cercle, soit le cercle FO, que ce cercle coupe la droite BC au point O et joignons AO.

Je dis que si nous inclinons la droite AO suivant un angle égal à l'angle GIH, la droite inclinée aboutit au cercle DE, et que si nous joignons son extrémité et le point A par une droite, elle entoure avec elle un angle égal à l'angle GHI et le rapport de l'une des droites à l'autre est égal au rapport de GH à HI.

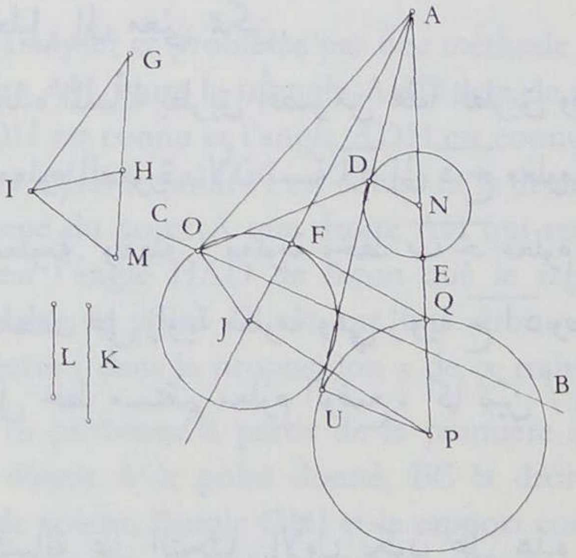
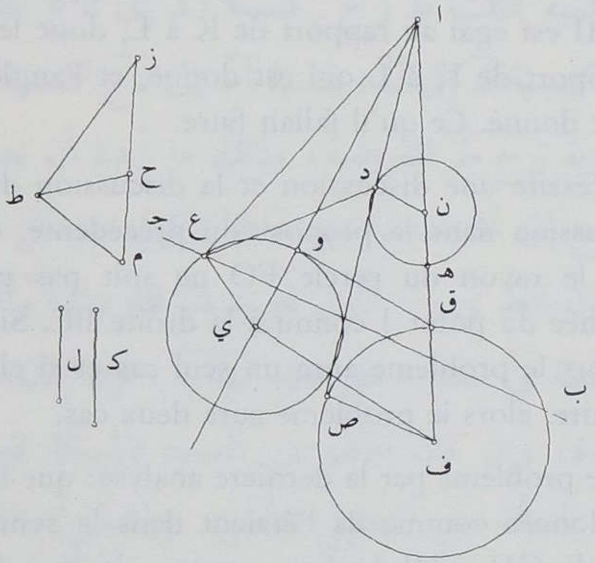


Fig. 39

Démonstration: Joignons JO, posons P comme centre et traçons avec la distance PQ un cercle, soit le cercle QU. Menons du point P une droite qui entoure avec la droite AP un angle égal à l'angle AJO, qu'elle rencontre la circonférence du cercle au point U, et joignons AU. Le triangle APU est semblable au triangle JAO; menons ND parallèle à PU, donc le rapport de PU à ND est égal au rapport de PA à AN. Mais le rapport de PA à AN est

إلى ا ن. ونعمل على نقطة آ زاوية ف ا ي مثل زاوية م ز ط ، ونجعل نسبة ي آ إلى ا ف كنسبة ط ز إلى ز م ، ونجعل نسبة ي و إلى ف ق كنسبة ي ا إلى ا ف. ونجعل ي مركزاً / ونذير ببعد ي و دائرة ، ولتكن دائرة و ع ، ولتقطع هذه الدائرة خط ب ج على نقطة ع ، ونصل ا ع. س - ٣٣١ - ظ

فأقول : إنا إذا عطفنا خط ا ع على زاوية مساوية لزاوية ز ط ح انتهى الخط المنعطف إلى دائرة د ه ، وإذا وصلنا بين طرفه وبين نقطة آ بخط مستقيم، أحاط معه بزاوية مساوية لزاوية ز ح ط وكانت نسبة أحد الخطين إلى الآخر كنسبة ز ح إلى ح ط.



برهان ذلك : أنا نصل ي ع ونجعل ف مركزاً ونذير ببعد ف ق دائرة ، ولتكن دائرة ق ص. ونخرج من نقطة ف خطاً يحيط مع خط ا ف بزاوية مساوية لزاوية ا ي ع ، وليلق محيط الدائرة على نقطة ص. ونصل ا ص فيكون مثلث ا ف ص شبيهاً بمثلث ي ا ع ؛ ونخرج ن د موازياً لـ ف ص ، فيكون نسبة ف ص إلى ن د كنسبة ف ا إلى

1 ونعمل : نعمل [ب] / م ز ط : ر ط د [س] / ونجعل : نجعل [س] / ي آ : ب آ [ب] – 2 ي و : بق [ب] ي ف [س] / ي ا : ب ا [ب] – 3 ي و : نو [ب] ي د [س] / و ع : وح [ب] د ع [س] / هذه : بهذه [ب] / ب ج : عحـ [ب] – 5 ز ط ح : ر ح ط ح [س] – 6 وإذا : فاذا [ب] / مستقيم : ناقصة [س] – 10 نخرج من : مكررة [س] / ا ي ع : ا د ع [س] – 11 ونصل ا ص : ناقصة [ب] – 12 لـ ف ص : بفرض [س]

égal au rapport de PU, qui est égal à PQ, au rayon du cercle, donc la droite ND est le rayon du cercle et par conséquent le point D est sur la circonférence du cercle.

Joignons OD. Puisque le triangle APU est semblable au triangle AJO, le rapport de JA à AP est égal au rapport de OA à AU. Mais le rapport de JA à AP est égal au rapport de IG à GM, donc le rapport de OA à AU est égal au rapport de IG à GM. Mais le rapport de UA à AD est égal au rapport de MG à GH, car il est égal au rapport de PA à AN. Donc le rapport de OA à AD est égal au rapport de IG à GH. Mais l'angle OAJ est égal à l'angle UAP, donc l'angle OAU est égal à l'angle PAJ. Mais l'angle PAJ est égal à l'angle IGH, donc l'angle OAD est égal à l'angle IGH, et le rapport de OA à AD est égal au rapport de IG à GH, donc le triangle OAD est semblable au triangle IGH. Le rapport de AD à DO est donc égal au rapport de GH à HI et le rapport de GH à HI est égal au rapport de K à L, donc le rapport de AD à DO est égal au rapport de K à L qui est donné, et l'angle ADO est égal à l'angle GHI qui est donné. Ce qu'il fallait faire.

Ce problème nécessite une discussion et la discussion dans cette synthèse est comme la discussion dans la proposition précédente, c'est-à-dire que la droite JF qui est le rayon du cercle FO ne soit pas plus petite que la perpendiculaire menée du point J connu à la droite BC. Si elle est égale à la perpendiculaire, alors le problème aura un seul cas et si elle est plus grande que la perpendiculaire, alors le problème aura deux cas.

La synthèse de ce problème par la dernière analyse: que la droite, l'angle et le rapport soient donnés comme ils l'étaient dans la synthèse qui précède. Posons le rapport de GH à HI égal au rapport de K à L et joignons GI. Menons du point A une perpendiculaire à la droite BC, soit AM. Construisons sur la droite AM un angle MAN égal à l'angle IGH. Posons le rapport de MA à AN égal au rapport de IG à GH et menons du point N une droite suivant un angle droit, soit ND; prolongeons-la, qu'elle rencontre le cercle au point D; joignons AD et posons l'angle DAO égal à l'angle NAM. Mais

ا ن. لكن نسبة ف ا إلى ا ن هي كنسبة ف ص – المساوي لـ ف ق – إلى نصف قطر الدائرة، فخط ن د هو نصف قطر الدائرة، فنقطة د على محيط الدائرة.

ونصل ع د. فلأن مثلث ا ف ص شبيه بمثلث ا ي ع، يكون نسبة ي ا إلى ا ف كنسبة ع ا إلى ا ص. ونسبة ي ا إلى ا ف هي كنسبة ط ز إلى زم، فنسبة ع ا إلى ا ص كنسبة ط ز إلى زم. ونسبة ص ا إلى ا د كنسبة م ز إلى ز ح، لأنها كنسبة ف ا إلى ا ن. فنسبة ع ا إلى ا د كنسبة ط ز إلى ز ح. وزاوية ع ا ي مساوية لزاوية ص ا ف، فزاوية ع ا ص مساوية لزاوية ف ا ي. وزاوية ف ا ي مساوية لزاوية ط ز ح، فزاوية ع ا د مساوية لزاوية ط ز ح، ونسبة ع ا إلى ا د كنسبة ط ز إلى ز ح، فمثلث ع ا د شبيه بمثلث ط ز ح. فنسبة ا د إلى د ع كنسبة ز ح إلى ح ط ونسبة ز ح إلى ح ط كنسبة ك إلى ل، فنسبة ا د إلى د ع كنسبة ك إلى ل المفروضة، وزاوية ا د ع مثل زاوية ز ح ط المفروضة، وذلك ما أردنا أن نعمل.

وهذه المسألة تحتاج إلى تحديد، وتحديد هذا التركيب هو مثل تحديد الشكل الذي قبل هذا، وهو أن يكون خط ي و – الذي هو نصف قطر دائرة و ع – ليس بأصغر من العمود الخارج من نقطة ي المعلومة على خط ب ج. فإن كان مساوياً للعمود، فإن المسألة تقع مرة واحدة، وإن كان أعظم من العمود فالمسألة تقع مرتين.

فأما تركيب هذه المسألة على التحليل الأخير: و〈ليكن〉 الخط والزاوية والنسبة مفروضات، على ما كانت في التركيب الذي قد مضى. فإنا نجعل نسبة ز ح إلى ح ط كنسبة ك إلى ل، ونصل ز ط. ونخرج من نقطة ا عموداً على خط ب ج وليكن ا م. ولنعمل على خط ا م زاوية م ا ن مساوية لزاوية ط ز ح. ونجعل نسبة م ا إلى ا ن كنسبة ط ز إلى ز ح، ونخرج من نقطة ن خطاً على زاوية قائمة، وليكن ن د. ولنخرجه على استقامة، وليلق الدائرة على نقطة د، ونصل ا د، ونجعل زاوية د ا ع مثل زاوية ن ا م.

3 ا ي ع : ا د ع [س] – 9 ز ح (الأولى) : د ح [ب] – 9-10 ز ح إلى ... د ع كنسبة : ناقصة [ب] – 12 إلى تحديد : ناقصة [س] – 13 ي و: ي د [س] / و ع : د ع [س] – 19 ولنعمل على : ونعمل [س] – 20 ن : ف [س] / ن د : ر د [س]

puisque l'angle DAO est égal à l'angle NAM, alors l'angle NAD est égal à l'angle MAO. La droite AO rencontre donc la droite BC, qu'elle la rencontre
B. 82^v au point O. Alors le triangle / MAO est semblable au triangle NAD.
S. 331^r Joignons OD, alors le rapport de MA à AO est égal au rapport de NA à AD,/ donc le rapport de MA à AN est égal au rapport de OA à AD. Mais le rapport de MA à AN est égal au rapport de IG à GH, donc le rapport de OA à AD est égal au rapport de IG à GH. Or l'angle OAD est égal à l'angle IGH, donc le triangle AOD est semblable au triangle GHI, l'angle ADO est donc égal à l'angle GHI et le rapport de AD à DO est égal au rapport de GH à HI qui est le rapport de K à L. Nous avons donc mené une droite au cercle, qui est la droite AD, nous l'avons inclinée suivant un angle égal à l'angle GHI, qui est l'angle ADO; le rapport de AD à DO est devenu égal au rapport de K à L. Ce qu'il fallait faire.

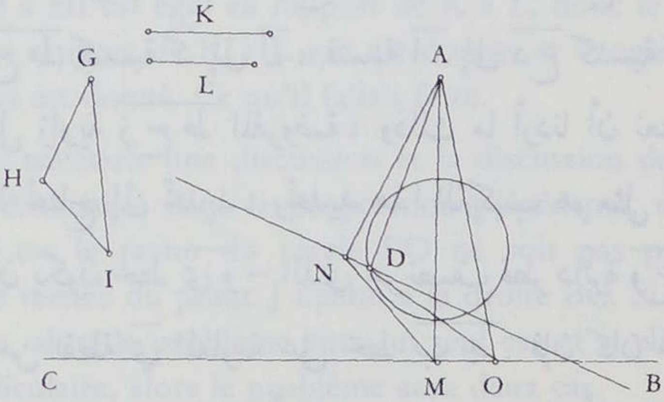
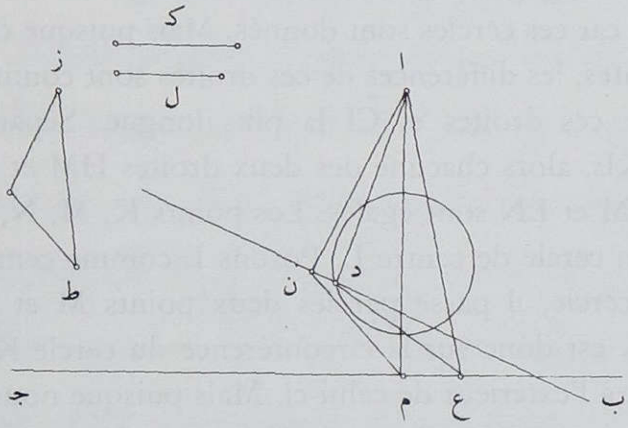


Fig. 40

Cette synthèse nécessite également une discussion. La discussion dans cette synthèse concerne la droite ND. Si la droite AN est de grandeur et de position connues et que son point N est connu et si on a mené de ce point une droite suivant un angle droit qui est ND, alors la droite ND est de position connue. Mais la droite ND rencontre le cercle ou ne le rencontre pas. Si la droite ND rencontre le cercle, alors le problème s'achève, si elle ne le rencontre pas, alors le problème ne s'achève pas. Si la droite ND rencontre le cercle, elle lui est tangente ou bien elle le coupe. Si elle lui est tangente, elle le

ولأن زاوية د ا ع مثل زاوية ن ا م ، فزاوية ن ا د مثل زاوية م ا ع . فخط ا ع يلقى خط ب ج ، فليلقه على نقطة ع . فيكون مثلث / م ا ع شبيهاً بمثلث ن ا د . ونصل ع د ، ب - ٨٢ - ظ
فيكون نسبة م ا إلى ا ع كنسبة ن ا إلى ا د ، / فنسبة م ا إلى ا ن كنسبة ع ا إلى ا د ، س - ٣٣١ - و
ونسبة م ا إلى ا ن هي كنسبة ط ز إلى ز ح ، فنسبة ع ا إلى ا د كنسبة ط ز إلى ز ح . وزاوية ع ا د مساوية لزاوية ط ز ح ، فمثلث ا ع د شبيه بمثلث ز ح ط ، فزاوية ا د ع مساوية لزاوية ز ح ط ، ونسبة ا د إلى د ع كنسبة ز ح إلى ح ط ، التي هي كنسبة ك إلى ل . فقد أخرجنا خطاً إلى الدائرة وهو خط ا د ، وعطفناه على زاوية مساوية لزاوية ز ح ط وهي زاوية ا د ع ، وصارت نسبة ا د إلى د ع كنسبة ك إلى ل ؛ وذلك ما أردنا أن نعمل.



وهذا التركيب أيضاً يحتاج إلى تحديد، وتحديد هذا التركيب هو لخط ن د. فإن خط ا ن معلوم القدر والوضع ونقطة ن منه معلومة، وقد خرج منها خط على زاوية قائمة وهو ن د ، فخط ن د معلوم الوضع. وخط ن د إما أن يلقى الدائرة وإما ألاّ يلقاها. فإن كان خط ن د يلقى الدائرة، فإن المسألة تتم، وإن كان لا يلقاها، فإن المسألة لا تتم. وإذا لقي خط ن د الدائرة فهو إما أن يماسّها وإما أن يقطعها. فإن ماسّها فهو يلقاها على

1 ولأن : فلان [س] – 10 هذا : ناقصة [س] / لخط : بخط [ب] – 13 يلقى : ويلقى [س] / وإن : فان [ب] / تتم : يتم [س]

rencontre en un seul point, et le problème a un seul cas. Si elle le coupe, elle le rencontre en deux points et le problème a deux cas.

⟨**22**⟩ Parmi ces exemples, notre énoncé: tracer un cercle tangent aux trois cercles donnés de grandeurs différentes dont les centres ne sont pas alignés. Que les trois cercles soient les cercles AB, CD et EG. Tracer un cercle qui leur soit tangent.

La méthode de l'analyse dans ce problème est de supposer que ceci a été achevé et que le cercle tangent aux trois cercles est le cercle BCE. Que les centres des cercles soient H, I, K, L. Nous examinons ensuite les propriétés nécessaires à cet objet. Si l'analyste examine les propriétés de cet objet, il lui apparaît que toute droite qui joint les centres de deux de ces cercles passe par le point de contact, comme il a été montré dans le troisième livre de l'ouvrage d'Euclide. Joignons les centres par les droites HL, LK et LI, elles passent donc par les points B, C et E. Nous examinons ensuite ce qui est nécessaire à ces droites, il s'en dégage que les droites HB, EK et CI sont chacune de grandeur connue, car ces cercles sont donnés. Mais puisque ces cercles sont de grandeurs différentes, les différences de ces droites sont connues. Que KE soit la plus courte de ces droites et CI la plus longue. Séparons BM et CN, chacune égale à KE, alors chacune des deux droites HM et NI est connue et les droites LK, LM et LN sont égales. Les points K, M, N, sont donc sur la circonférence d'un cercle de centre L. Posons L comme centre et traçons à la distance LK un cercle, il passe par les deux points M et N, soit le cercle KMN; le point K est donc sur la circonférence du cercle KMN, et les deux points H et I sont à l'extérieur de celui-ci. Mais puisque nous voulons ajouter un supplément qui engendre des propriétés qui n'étaient pas, joignons les deux droites KH et KI, ces deux droites entourent un angle car les trois centres ne sont pas alignés par hypothèse. Mais si les deux droites HK et KI entourent un angle, alors la somme des deux angles LKH et LKI est inférieure à deux droits, l'un de ces deux angles est aigu dans tous les cas, ou
B. 83r bien tous les deux / sont aigus.

نقطة واحدة، فالمسألة تقع مرة واحدة. وإن قطعها فهو يلقاها على نقطتين، فالمسألة تقع مرتين.

⟨كب⟩ ومنها قولنا: نريد أن نرسم دائرة تماس ثلاث دوائر مفروضة مختلفة المقادير وليست مراكزها على خط واحد مستقيم. فليكن الدوائر الثلاث * دوائر ا ب ج د ه ز. ونريد أن نرسم دائرة تماس هذه الدوائر.

فطريق التحليل في هذه المسألة هو أن نفرض أن ذلك قد تمّ وأن الدائرة المماسة للدوائر الثلاث دائرة ب ج ه. وليكن مراكز الدوائر ح ط ك ل. ثم ننظر فيما يلزم هذا الموضوع من الخواص. وإذا نظر المحلل في خواص هذا الموضوع، تبين منه أن كل خط يُوصل بين مركزي دائرتين من هذه الدوائر فهو يمرّ بموضع التماس، كما تبيّن في المقالة الثالثة من كتاب أقليدس. فلنوصل بين المراكز بخطوط ح ل ل ك ل ط فهي تمرّ بنقط ب ج ه. ثم ننظر فيما يلزم من هذه الخطوط، فيظهر من ذلك أن خطوط ح ب ه ك ج ط كل واحد منها معلوم القدر، لأن هذه الدوائر مفروضة. ولأن هذه الدوائر مختلفة المقادير، يكون تفاضل هذه الخطوط معلومة. فليكن أقصر هذه الخطوط ك ه وأطولها خط ج ط. ونفصل كل واحد من ب م ج ن مثل ك ه، فيكون كل واحد من خطي ح م ن ط معلوماً، ويكون خطوط ل ك ل م ل ن متساوية. فيكون نقط ك م ن على محيط دائرة مركزها ل. فنجعل ل مركزاً ونذير ببعد ل ك دائرة، فهي تمرّ بنقطتي م ن، ولتكن دائرة ك م ن. فيكون نقطة ك على محيط دائرة ك م ن، ونقطتا ح ط خارجتين عنها. ولأنا نريد أن نزيد زيادة تحدث بها خواص لم تكن، فنصل خطي ك ح ك ط، فيكون هذان الخطان يحيطان بزاوية، لأن المراكز الثلاث هي بالفرض ليست على خط مستقيم. وإذا كان خطا ح ك ك ط يحيطان بزاوية، فإن زاويتي ل ك ح ل ك ط أصغر من قائمتين، فإحدى هاتين الزاويتين على كل حال حادة، أو كل واحدة منهما / حادة. ب – ٨٣ – و

1 فالمسألة (الأولى): والمسألة [س] – 4 * ... * كرر ناسخ [ب] ما بين النجمتين، ثم رجع فأشار إلى هذا – 6 فطريق: بطريق [س] / الدائرة: الدوائر [ب] – 7 ط: ناقصة [ب] – 8 من ... الموضوع: ناقصة [ب] – 10 ح ل: ط ح ل [س] – 11 ننظر: ينظر [س] – 14 خط ج ط ونفصل: ط د نفصل [س] – 15 نقط: نقطة [ب] – 17 دائرة ك م ن: هذه الدائرة [س] – 18 تحدث بها: مطموسة [ب] / تكن: يكن [س]

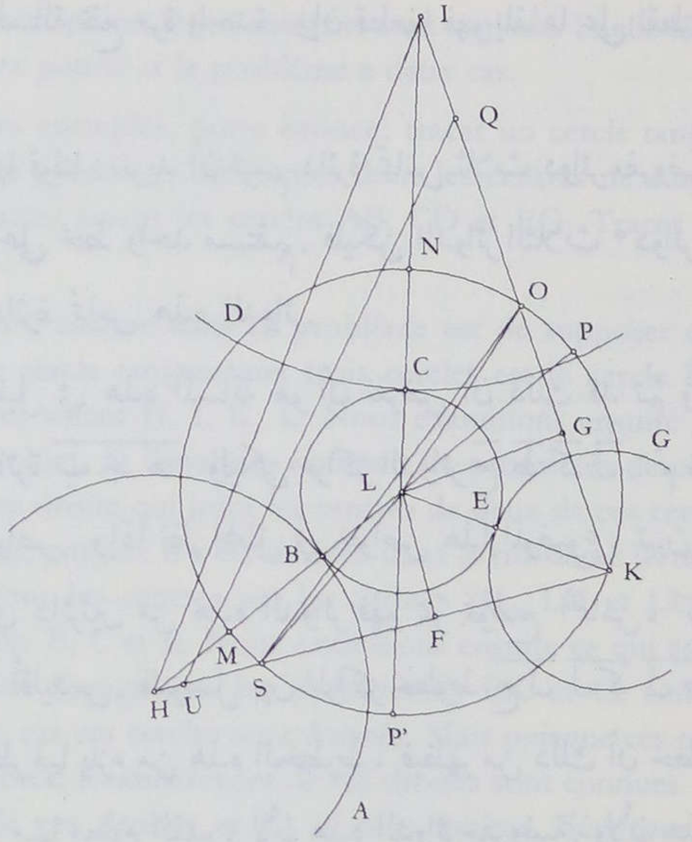
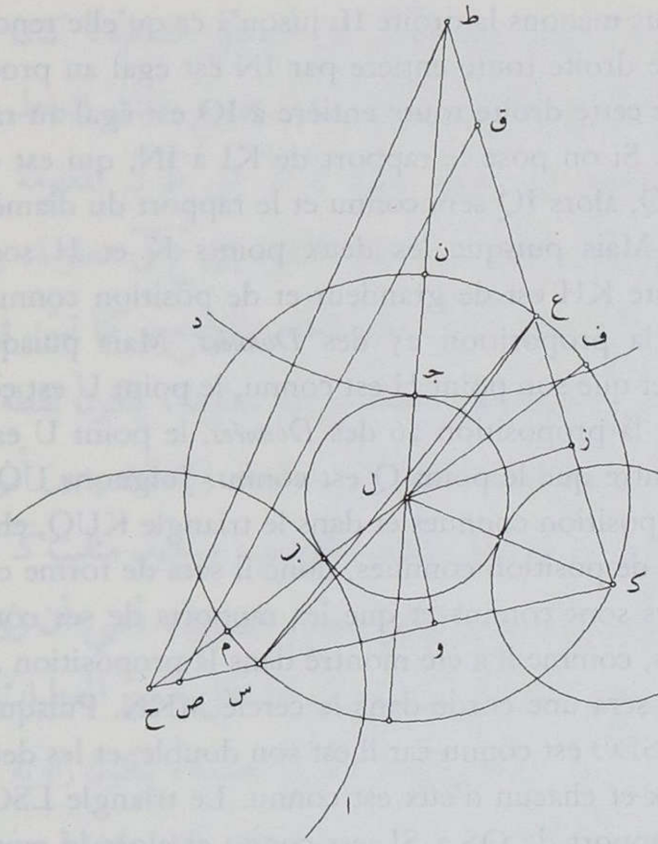


Fig. 41

Que tous les deux soient d'abord aigus, alors chacune des deux droites KH et KI coupe le cercle KMN. Que la droite KH coupe le cercle au point S et
S. 331v que la droite KI coupe ce cercle au point O. Joignons SL, OL et HI / et menons HL jusqu'à ce qu'elle rencontre le cercle, qu'elle le rencontre au point P. Le produit de KH par HS est donc égal au produit de PH par HM. Le rapport de PH à HS est donc égal au rapport de KH à HM. Mais le rapport de KH à HM est connu car chacune d'elles est connu, comme il a été montré dans la première proposition des *Données*. Le rapport de PH à HS est donc connu, qu'il soit égal au rapport de MH à HU, donc le rapport de MH à HU sera connu. Or MH est connu, donc HU est connu, comme il a été montré dans la proposition 2 des *Données*. Il reste le rapport de MP, qui est le diamètre du cercle, à US égal au rapport de PH à HS qui est connu et qui est égal au rapport de KH à HM, donc le rapport de KH à HM est égal au rapport de MH à HU.



فليكن أولاً كل واحدة منهما حادة، فيكون كل واحد من خطي ك ح ك ط قاطعاً لدائرة ك م ن. فليقطع خط ك ح * الذائرة على نقطة س، وليقطع ⟨خط⟩ ك ط هذه الدائرة على نقطة ع. ونصل س ل ع ل ح ط، / ونخرج ح ل حتى يلقى الدائرة، س – ٣٣١ – وليلقها على نقطة ف. فيكون ضرب ك ح في ح س مثل ضرب ف ح في ح م. فيكون نسبة ف ح إلى ح س كنسبة ك ح إلى ح م. ونسبة ك ح إلى ح م معلومة، لأن كل واحد منهما معلوم، كما تبيّن في الشكل الأول من المعطيات. فنسبة ف ح إلى ح س معلومة، فلتكن كنسبة م ح إلى ح ص، فيكون نسبة م ح إلى ح ص معلومة. وم ح معلوم، فـح ص معلوم، كما تبيّن في الشكل ب من المعطيات. فتبقى نسبة م ف – الذي هو قطر الدائرة – إلى ص س كنسبة ف ح إلى ح س المعلومة، التي هي كنسبة ك ح إلى ح م، وتكون نسبة ك ح إلى ح م كنسبة م ح إلى ح ص.

7 كنسبة : نسبة [س] – 8 ف ح ص : ف ح ض [س] – 9 ح س : جـ س [ب] – 10 ح ص : جـ ص [ب] (كتب ناسخ [ب] بإزاء هذا الشكل : «الصورة الأولى»)

De même si nous menons la droite IL jusqu'à ce qu'elle rencontre le cercle, le produit de cette droite toute entière par IN est égal au produit de KI par IO. Le rapport de cette droite toute entière à IO est égal au rapport de IK à IN qui est connu. Si on pose le rapport de KI à IN, qui est connu, égal au rapport de NI à IQ, alors IQ sera connu et le rapport du diamètre du cercle à OQ sera connu. Mais puisque les deux points K et H sont connus par hypothèse, la droite KH est de grandeur et de position connues comme il a été montré dans la proposition 25 des *Données*. Mais puisque HU est de grandeur connue et que son point H est connu, le point U est connu comme il a été montré dans la proposition 26 des *Données*, le point U est donc connu. De même, on montre que le point Q est connu. Joignons UQ, alors UQ est de grandeur et de position connues et dans le triangle KUQ, chacun des côtés est de grandeur et de position connues, donc il sera de forme connue, c'est-à-dire que ses angles sont connus et que les rapports de ses côtés les uns aux autres sont connus, comme il a été montré dans la proposition 40 des *Données*. Joignons SO, elle sera une corde dans le cercle MKN. Puisque l'angle SKO est connu, l'angle SLO est connu car il est son double, et les deux angles LSO et LOS sont égaux et chacun d'eux est connu. Le triangle LSO est de forme connue, donc le rapport de OS à SL est connu et alors le rapport de OS au double de SL, qui est le diamètre du cercle, est connu. Le rapport de la droite SO au diamètre du cercle est connu et le rapport de chacune ⟨des droites⟩ US et QO au diamètre du cercle est connu, donc le rapport de la droite SO à chacune des droites US et QO est donc un rapport connu comme il a été montré dans la proposition 8 des *Données*.

L'analyse a donc abouti à ce que l'on mène dans le triangle UKQ qui est de forme connue, la droite SO de sorte que son rapport à chacune des deux droites SU et OQ soit un rapport connu. Mais le rapport de US à QO est connu car le rapport de chacun d'elles au diamètre du cercle est connu, et le rapport de UK à KQ est connu, donc le rapport de UK à KQ est ou bien égal au rapport de US à QO, ou bien n'est pas égal au rapport de US à QO. Si le rapport de UK à KQ est égal au rapport de US à QO, alors la droite SO sera

وكذلك أيضاً إذا أخرجنا خط ط ل إلى أن يلقى الدائرة، كان ضرب جميعه في ط ن مثل ضرب ك ط في ط ع. فيكون نسبة جميع ذلك الخط إلى ط ع كنسبة ط ك إلى ط ن المعلومة. فإذا جُعل نسبة ك ط إلى ط ن المعلومة كنسبة ن ط إلى ط ق، كان ط ق معلوماً وكانت نسبة قطر الدائرة إلى ع ق معلومة. ولأن نقطتي ك ح معلومتان بالفرض، يكون خط ك ح معلوم القدر والوضع، كما تبيّن في الشكل كه من المعطيات. ولأن ح ص معلوم القدر ونقطة ح منه معلومة، يكون نقطة ص معلومة، كما تبيّن في الشكل كو من المعطيات. فنقطة ص معلومة. وكذلك يتبين أن نقطة ق معلومة. ونصل ص ق، فيكون ص ق معلوم القدر والوضع، ويكون مثلث ك ص ق كل واحد من أضلاعه معلوم القدر والوضع، فيكون معلوم الصورة، أعني أن زواياه معلومة ونسبة أضلاعه بعضها إلى بعض معلومة، كما تبيّن في الشكل م من المعطيات. ونصل س ع، فيكون وتراً في دائرة م ك ن. ولأن زاوية س ك ع معلومة، يكون زاوية س ل ع معلومة، لأنها ضعفها، وزاويتا ل س ع ل ع س متساويتان وكل واحدة منهما معلومة. فمثلث ل س ع معلوم الصورة، فنسبة ع س إلى س ل معلومة، فنسبة ع س إلى ضعف س ل – الذي هو قطر الدائرة – معلومة. فنسبة خط س ع إلى قطر الدائرة معلومة ونسبة كل واحد من ص س وق ع إلى قطر الدائرة معلومة، فنسبة خط س ع إلى كل واحد من خطي ص س ق ع نسبة معلومة، كما تبيّن في الشكل ح من المعطيات.

فقد انتهى التحليل إلى أنه قد خرج في مثلث ص ك ق – المعلوم الصورة – خط س ع حتى صارت نسبته إلى كل واحد من خطي س ص ع ق نسبة معلومة. ونسبة ص س إلى ق ع معلومة، لأن نسبة كل واحد منهما إلى قطر الدائرة معلومة، ونسبة ص ك إلى ك ق معلومة، فنسبة ص ك إلى ك ق إما أن تكون كنسبة ص س إلى ق ع أو لا تكون كنسبة ص س إلى ق ع. فإن كانت نسبة ص ك إلى ك ق كنسبة ص س

3 ك ط : ط ك [س] – 5 معلومتان : معلومتين [ب] – 10 م : لر [ب، س] – 11 ولأن : فلان [س] / س ل ع : س ا ع [س] – 12 وكل : فكل [س] – 14 س ل : س د [ب] – 15 وق ع : د ق ع [س] – 14-15 قطر ... س ع إلى : ناقصة [ب] – 17 أنه : ان [س] – 20 تكون : يكون [س] – 21 أو لا تكون ... ق ع : ناقصة [ب]

parallèle à la droite UQ, car le rapport de SU à UK est égal au rapport de OQ à QK. Si le rapport de UK à KQ n'est pas égal au rapport de US à QO, alors la droite SO n'est pas parallèle à la droite UQ.

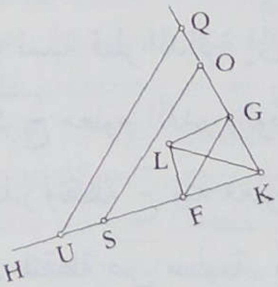
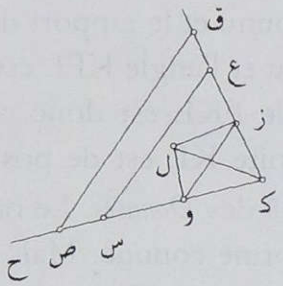


Fig. 41a

Si la droite SO est parallèle à la droite UQ, le triangle OSK est semblable au triangle QKU. Mais le triangle QKU est de forme connue, comme on l'a montré précédemment, donc le triangle OSK est de forme connue. Le rapport de OS à SK est donc connu. Mais le rapport de OS à SU est connu, donc le rapport de US à SK est connu. Mais UK est de grandeur connue, donc chacune des deux droites US et SK est de grandeur connue, comme il a été
S. 332r montré dans la proposition 7 des *Données*./ La droite SK est donc de grandeur connue, et de même on montre que la droite OK est de grandeur connue; la droite OS sera de grandeur connue car son rapport à SK est connu. Dans le triangle OSK, chaque côté est de grandeur et de position connues. Mais ce triangle est inscrit dans le cercle MKN. Menons du point L, une perpendiculaire à la droite SK, soit LF. Elle partage SK qui est de grandeur connue en deux moitiés, le point F sera donc connu. Menons également du point L une perpendiculaire à la droite OK, soit LG, le point G est connu. Joignons FG, FG est connue et le triangle KFG sera de forme connue car chacun de ses

إلى ق ع، فإن خط س ع هو موازٍ لخط ص ق، لأن نسبة س ص إلى ص ك تكون كنسبة ع ق إلى ق ك. وإن لم تكن نسبة ص ك إلى ك ق كنسبة ص س إلى ق ع، فإن خط س ع ليس بموازٍ لخط ص ق.



وإذا كان خط س ع موازياً لخط ص ق، يكون مثلث ع س ك شبيهاً بمثلث ق ك ص. ومثلث ق ك ص معلوم الصورة، كما تبيّن من قبل، فيكون مثلث ع س ك معلوم الصورة، فيكون نسبة ع س إلى س ك معلومة. ونسبة ع س إلى س ص معلومة، فنسبة ص س إلى س ك معلومة. وص ك معلوم القدر، فكل واحد من خطي ص س س ك معلوم القدر، كما تبيّن في الشكل ز من المعطيات. / فخط س ك معلوم القدر، وكذلك يتبيّن أن خط ع ك معلوم القدر، س - ٣٣٢ - و
ويكون ⟨خط⟩ ع س معلوم القدر، لأن نسبته إلى س ك معلومة. فيكون مثلث ع س ك كل واحد من أضلاعه معلوم القدر والوضع. وقد رُسم عليه دائرة م ك ن. ونخرج من نقطة ل عموداً على خط س ك وليكن ل و. فهو يقسم س ك – المعلوم القدر – بنصفين، فيكون نقطة و معلومة. ونخرج من نقطة ل أيضاً عموداً على خط ع ك وليكن ل ز، فتكون نقطة ز معلومة. ونصل و ز، فيكون و ز معلوماً، ويكون مثلث ك و ز معلوم الصورة، لأن كل واحد من أضلاعه معلوم. فيكون

1 هو موازٍ: موازيًا [ب]، ص ك: ص ق [ب] – 3 ليس: ناقصة [س] / بموازٍ: بموازي [ب] مواز [س] – ليس هذا الشكل في المخطوطتين – 4 خط: ناقصة [ب] / ص ق: س ق [س] – 5 ق ك ص (الثانية): ك ق ص [ب] – 9 يتبين: تبين [ب، س] / القدر: ناقصة [ب] – 12 ل و: كثيرًا ما كتب ناسخ [س] الواو دالاً، ولقد سبق أنه استعمل الدال لتحديد دائرة ج د، وصححناها حتى لا تختلط الحروف دون إثباتها

côtés est connu. Le rapport de GF à FK est connu, l'angle KFG est connu et l'angle KFL est droit, donc l'angle GFL est connu, car si l'on retranche d'une grandeur connue, une grandeur connue, le reste sera connu comme il a été montré dans la proposition 4 des *Données*. De même, on montre que l'angle FGL est connu, il reste l'angle FLG qui est connu, donc le triangle LFG est de forme connue, comme il a été montré dans la proposition 38 des *Données*. Le rapport de GF à FL est connu et le rapport de FG à FK est connu, donc le rapport de KF à FL est connu et l'angle KFL est connu, donc le triangle LFK est de forme connue. L'angle FKL est donc connu et la droite HK est de position connue, donc la droite KL est de position connue, comme il a été montré dans la proposition 28 des *Données*. Le rapport de FK à KL est connu, car le triangle FKL est de forme connue. Mais la droite FK est de grandeur connue, donc la droite KL est de grandeur et position connues et son point K est connu, le point L est donc connu, comme il a été montré dans la proposition 26 des *Données*. Le point L est donc connu et il est le centre du cercle BEC tangent ⟨aux cercles donnés⟩, la droite KL est de grandeur
B. 83v connue, sa partie KE est connue car elle est le rayon du cercle donné / et le reste EL est connu et il est le rayon du cercle BEC. Donc le cercle BCE a un rayon de grandeur connue et son centre est de position connue, donc le cercle BCE est de grandeur et de position connues. Il peut donc exister car toute grandeur — de grandeur et de position connues — peut exister.

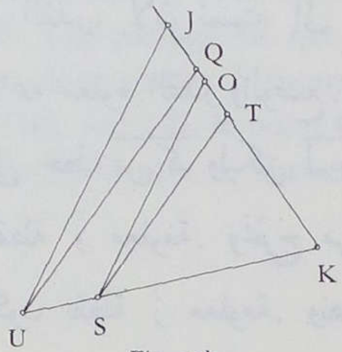
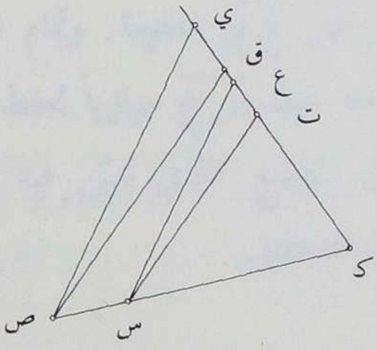


Fig. 41b

نسبة ز و إلى و ك معلومة، ويكون زاوية ك و ز معلومة وزاوية ك و ل قائمة، فزاوية ز و ل معلومة، لأنه إذا نقص من مقدار معلوم مقدار معلوم، فإن الباقي معلوم، كما تبيّن في الشكل د من المعطيات. وكذلك يتبيّن أن زاوية و ز ل معلومة، وتبقى زاوية و ل ز معلومة، فيكون مثلث ل و ز معلوم الصورة، كما تبيّن في الشكل لح من المعطيات. فيكون نسبة ز و إلى و ل معلومة، ونسبة و ز إلى و ك معلومة، فنسبة ك و إلى و ل معلومة، وزاوية ك و ل معلومة، فمثلث ل و ك معلوم الصورة. فزاوية و ك ل معلومة، وخط ح ك معلوم الوضع، فخط ك ل معلوم الوضع، كما تبيّن في الشكل كح من المعطيات. ونسبة و ك إلى ك ل معلومة، لأن مثلث و ك ل معلوم الصورة. وخط و ك معلوم القدر، فخط ك ل معلوم القدر والوضع، ونقطة ك منه معلومة، فنقطة ل معلومة، كما تبيّن في الشكل كو من المعطيات. فنقطة ل معلومة وهي مركز دائرة ب ه ج المماسة، وخط ك ل معلوم القدر و ك ه منه معلوم، لأنه نصف قطر الدائرة المفروضة، / فيبقى ه ل معلوماً وهو نصف قطر دائرة ب ه ج، ب – ٨٣ – ظ
فدائرة ب ج ه نصف قطرها معلوم القدر ومركزها معلوم الوضع، فدائرة ب ج ه معلومة القدر والوضع، فقد يمكن أن توجد، لأن كل مقدار معلوم القدر والوضع فإنه يمكن أن يوجد.



2 معلومة : ناقصة [س] – 3 د: الرابع [ب] / يتبين : تبين [ب] / وتبقى : فيبقى [س] – 12 ه ل : ه د [ب] – 13 فدائرة (الأولى) : وزاوية [ب] – ليس هذا الشكل في المخطوطتين

Si la droite SO n'est pas parallèle à la droite UQ, menons de l'un des deux points S ou O, une droite parallèle à la droite UQ, soit ST. Le rapport de US à QT est connu, car il est égal au rapport de UK à KQ. Mais le rapport de US à QO est connu, donc le rapport de OQ à QT est connu, comme il a été montré dans la proposition 8 des *Données*, et le rapport de QO à OT sera connu comme il a été montré dans la proposition 5 des *Données*. Or, le rapport de QO à OS est connu, donc le rapport de QO à chacune des deux grandeurs OT et OS est connu, donc le rapport de SO à OT est connu comme il a été montré dans la proposition 8 des *Données*. Menons du point U une droite parallèle à la droite SO, soit UJ. Le triangle UJQ est donc semblable au triangle SOT. Le rapport de UJ à JQ est donc égal au rapport de SO à OT. Mais le rapport de SO à OT est connu, donc le rapport UJ à JQ est connu et l'angle UQJ est connu, donc le triangle UJQ est de forme connue, comme il a été montré dans la proposition 41 des *Données*. Donc l'angle UJQ est connu et l'angle JUQ est connu, il reste l'angle UJK qui est connu. Alors l'angle JUK est connu, donc le triangle UJK est de forme connue. Le rapport de UK à KJ est connu. Mais le rapport de UK à KJ est égal au rapport de US à OJ, car UJ est parallèle à SO. Le rapport de US à OJ est donc connu, on a ainsi mené
S. 332v dans le triangle UKJ, de forme connue,/ la droite SO parallèle à la droite UJ, de sorte que le rapport de SO à chacune des deux droites SU et oJ est connu. L'analyse s'achève comme précédemment, c'est-à-dire à partir de l'endroit dans lequel on a supposé que la droite SO était parallèle à la droite UQ qui est la base du triangle de forme connue jusqu'à l'endroit dans lequel on a montré que le cercle BCE était de grandeur et de position connues, qui est l'achèvement de l'analyse.

وإن كان خط س ع غير موازٍ لخط ص ق، فإنا نخرج من إحدى نقطتي س ع خطاً موازياً لخط ص ق، وليكن س ت. فيكون نسبة ص س إلى ق ت معلومة، لأنها كنسبة ص ك إلى ك ق. وقد كانت نسبة ص س إلى ق ع معلومة، فيكون نسبة ع ق إلى ق ت معلومة، كما تبيّن في الشكل ح من المعطيات. ويكون نسبة ق ع إلى ع ت معلومة، كما تبيّن في الشكل ه من المعطيات. ونسبة ق ع إلى ع س معلومة، فنسبة ق ع إلى كل واحد من مقداري ع ت ع س معلومة، فنسبة س ع إلى ع ت معلومة، كما تبيّن في الشكل ح من المعطيات. ونخرج من نقطة ص خطاً موازياً لخط س ع، وليكن ص ي، فيكون مثلث ص ي ق شبيهاً بمثلث س ع ت. فيكون نسبة ص ي إلى ي ق كنسبة س ع إلى ع ت. ونسبة س ع إلى ع ت معلومة، فنسبة ص ي إلى ي ق معلومة، وزاوية ص ق ي معلومة، فمثلث ص ي ق معلوم الصورة كما تبيّن في الشكل ما من المعطيات. فزاوية ص ي ق معلومة، وزاوية ي ص ق معلومة، ويبقى زاوية ص ي ك معلومة، فزاوية ي ص ك معلومة، فمثلث ص ي ك معلوم الصورة. فنسبة ص ك إلى ك ي معلومة، ونسبة ص ك إلى ك ي هي كنسبة ص س إلى ع ي، لأن ص ي موازٍ لـ س ع. فنسبة ص س إلى ع ي معلومة، فقد خرج في مثلث ص ك ي المعلوم الصورة / خط س ع موازياً لخط ص ي وصارت نسبة س ع س - ٣٣٢ - ظ إلى كل واحد من خطي س ص ع ي معلومة. وتمام التحليل هو ما تقدم، أعني أن من الموضع الذي فرضنا فيه خط س ع موازياً لخط ص ق - الذي هو قاعدة المثلث المعلوم الصورة - إلى الموضع الذي تبيّن فيه أن دائرة ب ج ه معلومة القدر والوضع، هو تمام هذا التحليل.

2 ق ت: ق ب [ب] - 3 لأنها: لا [س] / ص ك: ص ق [ب] / إلى ق ع: مطموسة [ب] - 5 ق ع: ف ع [ب] - 6 ع س: ح س [س] - 8 ونخرج: كتب قبلها «ونسبته» [ب] - 9 س ع ت: س ع ب [ب] / ي ق: ب ق [ب] - 11 ما: غير مقروؤة [ب] ص [س] - 13 فزاوية: وزاوية [ب، س] / ي ص ك: ي ص ق [س] - 14 ع ي: ع س [س] - 15 موازٍ: موازى [ب] / فقد: وقد [س] - 16 موازيًا: موازي [س] - 18 من: ناقصة [س] - 19 أن: ا ن [س]

Ces deux analyses se fondent toutes les deux sur le fait que les deux droites KH et KI coupent le cercle KMN, ce qui a lieu quand chacun des deux angles HKL et IKL est plus petit qu'un droit.

Si l'un de ces deux angles n'est pas plus petit qu'un droit, alors l'autre angle est plus petit qu'un droit. Que l'angle HKL ne soit pas plus petit qu'un droit, alors l'angle LKI sera plus petit qu'un droit, donc la droite IK coupera le cercle KMN et l'angle HKL sera ou bien un droit ou bien plus grand qu'un droit.

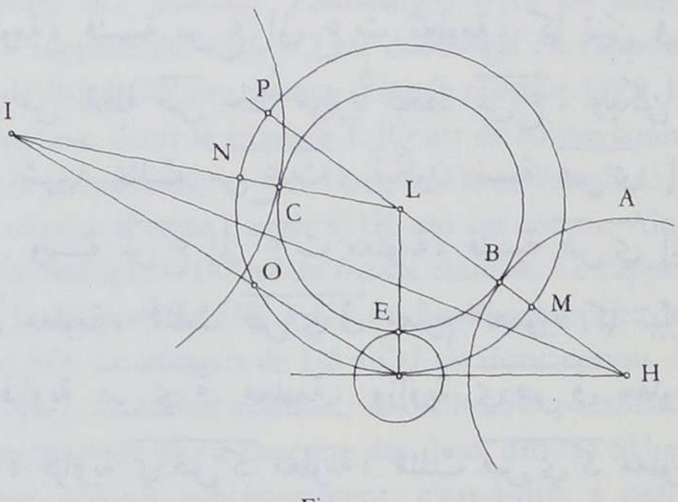
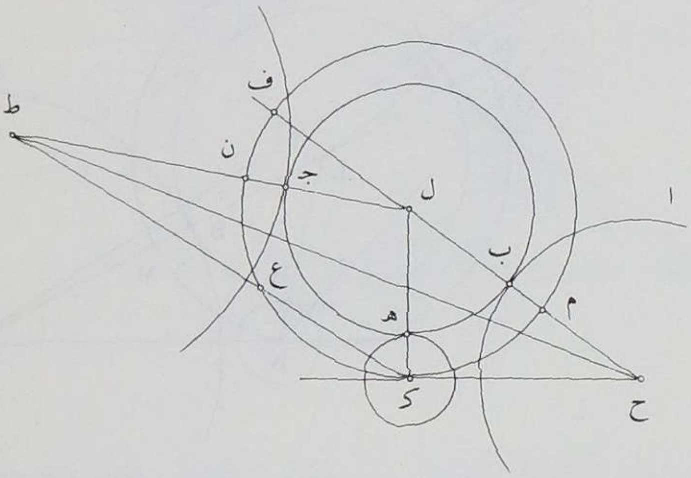


Fig. 42

Si l'angle HKL est droit comme dans le second cas de figure, alors le produit de PH par HM est égal au carré de HK, donc le rapport de PH à HK est égal au rapport de KH à HM. Mais le rapport de KH à HM est connu car chacune d'elles est connue, donc le rapport de PH à HK est connu et HK est de grandeur connue, donc la droite PH est de grandeur connue. Mais HM est de grandeur connue, donc la droite MP est de grandeur connue, et elle est le diamètre du cercle KMN. Donc le diamètre du cercle KMN est de grandeur connue, sa moitié est donc de grandeur connue et la droite LK est alors de grandeur connue. Mais elle est de position connue, car elle entoure avec la droite HK de position connue, un angle droit. La droite KL est donc de
B. 84r grandeur et de position connues et son point K est connu,/ donc le point L est connu et il est le centre du cercle BCE. Mais la droite KL est de grandeur

وهذان التحليلان جميعا هما على أن خطي ك ح ك ط يقطعان دائرة ك م ن، وذلك إذا كانت كل واحدة من زاويتي ح ك ل ط ك ل أصغر من قائمة.

فإن كانت إحدى هاتين الزاويتين ليست بأصغر من قائمة، فإن الزاوية الأخرى تكون أصغر من قائمة. فليكن زاوية ح ك ل ليست بأصغر من قائمة، فزاوية ل ك ط تكون أصغر من قائمة، فيكون خط ط ك يقطع دائرة ك م ن، ويكون زاوية ح ك ل إما قائمة وإما أعظم من قائمة.



فإن كانت زاوية ح ك ل قائمة، كما في الصورة الثانية، فإن ضرب ف ح في ح م مثل مربع ح ك، فنسبة ف ح إلى ح ك هي كنسبة ك ح إلى ح م. ونسبة ك ح إلى ح م معلومة، لأن كل واحد منهما معلوم، فنسبة ف ح إلى ح ك معلومة، وح ك معلوم القدر، فخط ف ح معلوم القدر. وح م معلوم القدر، فخط م ف معلوم القدر وهو قطر دائرة ك م ن. فقطر دائرة ك م ن معلوم القدر، فنصفه معلوم القدر، فخط ل ك معلوم القدر، وهو معلوم الوضع، لأنه يحيط مع خط ح ك – المعلوم الوضع – بزاوية قائمة، فخط ك ل معلوم القدر والوضع، ونقطة ك منه معلومة، / فنقطة ل معلومة وهي مركز دائرة ب جـ هـ. وخط ك ل معلوم ب – ٨٤ – و

5 ط ك : ك ط [س] – 14 منه : ناقصة [ب]

connue et la droite KE est de grandeur connue, donc la droite EL est de grandeur connue. Or, on a montré qu'elle est de position connue. Donc le cercle BCE tangent ⟨aux trois cercles⟩ est de grandeur et de position connues.

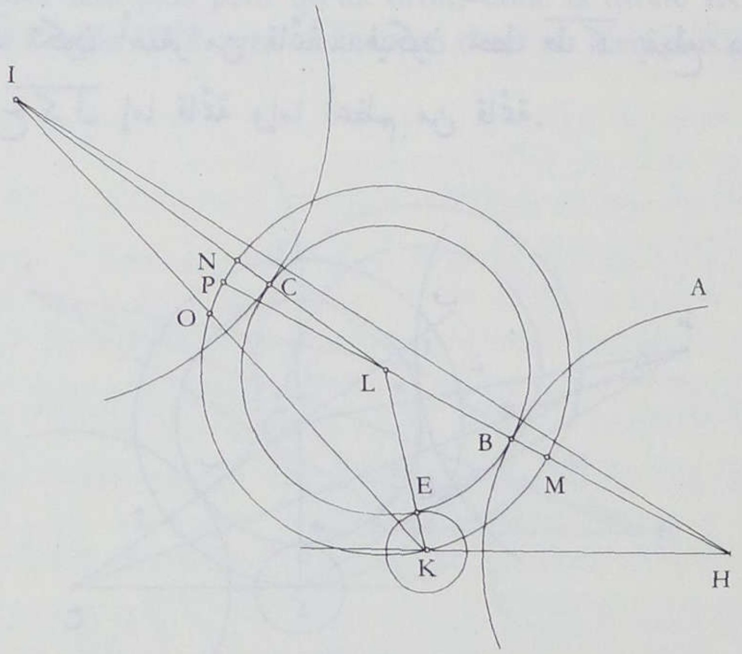


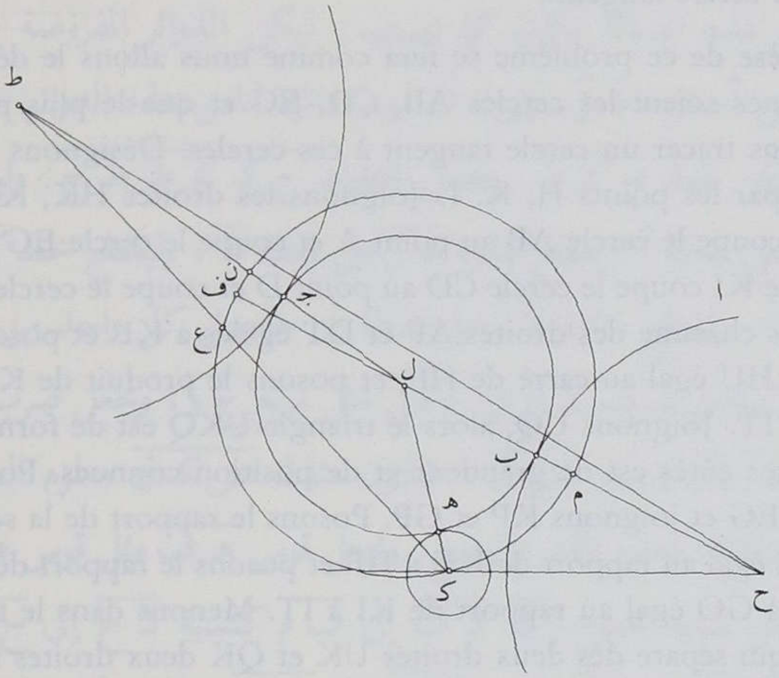
Fig. 43

Si l'angle HKL est plus grand qu'un droit comme dans le troisième cas de figure, alors l'analyse de cette proposition est la même analyse que celle que nous avons exposée lorsque nous avons supposé que la droite SO n'était pas parallèle à la droite UQ; ces deux analyses ne se différencient en rien. L'analyse de ce cas de figure, je veux dire le troisième, a abouti à ce que le cercle BCE est de grandeur et de position connues.

On montre donc par cette analyse que le cercle cherché qui est tangent aux trois cercles donnés est de grandeur et de position connues. Il peut donc exister. Pour le trouver, on utilise les prémisses qui ont été montrées dans l'analyse et qui ont conduit à ce cercle tangent de grandeur et de position connues.

Parmi ces prémisses auxquelles a abouti l'analyse, celle par laquelle on

القدر، وخط ك ه معلوم القدر، فخط ه ل معلوم القدر. وقد تبيّن أنه معلوم الوضع. فدائرة ب ج ه المماسة معلومة القدر والوضع.



وإن كانت زاوية ح ك ل أعظم من قائمة، كما في الصورة الثالثة، فإن تحليل الشكل هو التحليل بعينه الذي ذكرناه عند فرضنا خط س ع غير موازٍ لخط ص ق، لا يختلفان بشيء. فيتأدى تحليل هذه الصورة، أعني الثالثة، إلى أن دائرة ب ج ه معلومة القدر والوضع.

فيتبيّن بهذا التحليل أن الدائرة المطلوبة – التي تماس الدوائر الثلاث المفروضة – هي معلومة القدر والوضع. فقد يمكن أن تُوجد. ووجودها يكون باستعمال المقدمات التي تبينت في التحليل، التي أدت إلى أن الدائرة المماسة معلومة القدر والوضع.

ومن المقدمات التي انتهى إليها التحليل وبها يتم وجود الدائرة المماسة هي أن مثلث

4 موازٍ : موازى [ب] – 5 يختلفان : يختلفا [س] – 8 المفروضة : ناقصة [س] – 9 أدت : آدت [س] – 11 هي : هو [ب، س]

parvient à trouver le cercle tangent est que le triangle UKQ est de forme connue dans lequel on a mené la droite SO de sorte que le rapport de cette droite à chacune des droites SU et OQ soit connu. C'est à l'aide de cette droite que s'achève le problème et à l'aide de ces ⟨rapports⟩ que l'on trouve
S. 333r le centre du cercle tangent./

La synthèse de ce problème se fera comme nous allons le décrire: que les cercles donnés soient les cercles AB, CD, EG et que le plus petit soit EG; nous voulons tracer un cercle tangent à ces cercles. Désignons les centres de ces cercles par les points H, K, I. Joignons les droites HK, KI, IH. Que la droite HK coupe le cercle AB au point A et coupe le cercle EG au point E et que la droite KI coupe le cercle CD au point D et coupe le cercle EG au point G. Séparons chacune des droites AF et DT égales à KE et posons le produit de KH par HU égal au carré de HF, et posons le produit de KI par IQ égal au carré de IT. Joignons UQ, alors le triangle UKQ est de forme connue car chacun de ses côtés est de grandeur et de position connues. Posons l'arc EP égal à l'arc EG et joignons KP et GP. Posons le rapport de la somme de GK et KP à PM égal au rapport de KH à HF et posons le rapport de la somme de PK et KG à GO égal au rapport de KI à IT. Menons dans le triangle UKQ une droite qui sépare des deux droites UK et QK deux droites telles que son rapport à ce qu'elle sépare de la droite UK soit égal au rapport de GP à PM et que son rapport à ce qu'elle sépare de QK soit égal au rapport de GP à GO, soit la droite SN. On a montré comment trouver cette droite par l'analyse, nous allons procéder à la synthèse une fois terminée la construction du cercle afin que les propos ne se mélangent pas.

Si on mène la droite SN dans le triangle UKQ suivant le rapport que nous avons mentionné, alors le triangle SKN sera de grandeur connue et chacun de ses côtés sera de grandeur et de position connues. Traçons un cercle circonscrit au triangle SKN, soit le cercle SKN; le centre du cercle sera connu, soit le point L. Joignons les droites HL, KL, IL, SL et NL. Que la droite HL coupe le cercle SKN au point J et coupe le cercle AB au point B,

ص ك ق معلوم الصورة وقد خرج فيه خط س ع حتى صارت نسبته إلى كل واحد من خطي س ص ع ق معلومة، وهو الذي به تمت المسألة، وبها وُجد مركز الدائرة المماسة. / س - ٣٣٣

وتركيب هذه المسألة يكون كما نصف: ليكن الدوائر المفروضة دوائر ا ب ج د هـ ز، ولتكن أصغرها هـ ز، ونريد أن نرسم دائرة تماس هذه الدوائر. فنحدّ مراكز هذه الدوائر، وليكن نقط ح ك ط. ونصل خطوط ح ك ك ط ط ح. وليقطع خط ح ك دائرة ا ب على نقطة ا ويقطع دائرة هـ ز على نقطة هـ، وليقطع خط ك ط دائرة ج د على نقطة د، وليقطع دائرة هـ ز على نقطة ز. ونفصل كل واحد من خطي ا و د ت مثل ك هـ، ونجعل ضرب ك ح في ح ص مثل مربع ح و، ونجعل ضرب ك ط في ط ق مثل مربع ط ت. ونصل ص ق، فيكون مثلث ص ك ق معلوم الصورة، لأن كل واحد من أضلاعه معلوم القدر والوضع. ونجعل قوس هـ ف مثل قوس هـ ز ونصل ك ف ز ف، ونجعل نسبة مجموع ز ك ك ف إلى ف م كنسبة ك ح إلى ح و، ونجعل نسبة مجموع ف ك ك ز إلى ز ع كنسبة ك ط إلى ط ت. ونخرج في مثلث ص ك ق خطاً يفصل من خطي ص ك ق ك خطين ويكون نسبته إلى ما يفصله من خط ص ك كنسبة ز ف إلى ف م، ويكون نسبته إلى ما يفصله من ق ك كنسبة ز ف إلى ز ع، وليكن خط س ن. وقد تبيّن بالتحليل كيف يوجد هذا الخط، ونحن نركبه من بعد فراغنا من عمل الدائرة لئلا يختلط الكلام.

وإذا أخرج خط س ن في مثلث ص ك ق على النسبة التي ذكرناها، صار مثلث س ك ن معلوم القدر، فكل واحد من أضلاعه معلوم القدر والوضع. ونديرعلى مثلث س ك ن دائرة، ولتكن دائرة س ك ن، فيكون مركز هذه الدائرة معلوماً، وليكن نقطة ل. ونصل خطوط ح ل ك ل ط ل س ل ن ل. وليقطع خط ح ل دائرة س ك ن

2 س ص: س م [ب] / هو: يعود الضمير على خط س ع / بها: يعود الضمير على النسب – 6 نقط: نقطه [ب] – 8-7 هـ ... ز: ناقصة [س] – 8 ز: د [ب] – 9 ح ص: ط ق [ب] – 12 ح و: حـ م [ب] – 13 ف ك ك ز: ف ك ر [س] – 15 ق ك: د ك [س] / ز ف: وف [ب] – 16 تبين: ناقصة [ب] – 18 ص ك ق: ص ك ن [ب، س] – 21 ح ل (الثانية): د ل [ب]

que la droite IL coupe le cercle SKN au point X et coupe le cercle CD au point C, et que la droite KL coupe le cercle EG au point W. Les droites LK, LJ et LX sont égales.

Si l'angle HKI est plus petit qu'un droit, alors la portion SKN est plus grande qu'un demi-cercle, donc la droite SN sera au-delà du centre L, à l'intérieur du triangle UKQ comme dans le premier cas de figure, l'angle SLN est donc le double de l'angle SKN, il est donc égal à l'angle PKG, et alors le triangle SKN est semblable au triangle PKG. Le rapport de la somme de SL et LN à SN est égal au rapport de la somme de PK et KG à GP. Le rapport de NS à SU est égal au rapport de GP à PM, donc le rapport de la somme de SL et LN à SU est égal au rapport de la somme de GK et KP à PM et le rapport de la somme de PK et KG à PM est égal au rapport de KH à HF; donc le rapport de la somme de SL et LN à SU est égal au rapport de KH à HF. Prolongeons HL au point V, alors JV sera le diamètre du cercle SKN, elle sera donc égale à la somme de SL et LN. Le rapport de JV à SU est donc égal au rapport de KH à HF.

Je dis d'abord que HJ est égale à HF.

على نقطة ي، وليقطع دائرة اب على نقطة ب، وليقطع خط ط ل دائرة س ك ن على نقطة ش ويقطع دائرة جـ د على نقطة جـ، وليقطع خط ك ل دائرة هـ ز على نقطة خ. فيكون خطوط ل ك ل ي ل ش متساوية.

فإن كانت زاوية ح ك ط أصغر من قائمة، فإن قطعة س ك ن تكون أعظم من نصف دائرة، فيكون خط س ن من وراء مركز ل في داخل مثلث ص ك ق، كما في الصورة الأولى، فيكون زاوية س ل ن ضعف زاوية س ك ن، فهي مثل زاوية ف ك ز، فيكون مثلث س ك ن شبيهاً بمثلث ف ك ز. فيكون نسبة مجموع س ل ل ن إلى س ن كنسبة مجموع ف ك ك ز إلى ز ف. ونسبة ن س إلى س ص كنسبة ز ف إلى ف م، فنسبة مجموع س ل ل ن إلى س ص كنسبة مجموع ز ك ك ف إلى ف م 〈و〉 نسبة مجموع ف ك ك ز إلى ف م كنسبة ك ح إلى ح و، فنسبة مجموع س ل ل ن إلى س ص كنسبة ك ح إلى ح و. ونخرج ح ل على استقامة إلى ث، فيكون ي ث قطر دائرة س ك ن، فهو مساوٍ لمجموع س ل ل ن. فيكون نسبة ي ث إلى س ص كنسبة ك ح إلى ح و.

فأقول أولاً: إن ح ي مثل ح و.

2 ش: س [ب] / خ: ح ؛ غالبًا ما كتبها هكذا ولن نشير إليها فيما بعد [ب، س] – 3 ل ش: ل س [ب] – 6 س ل ن: س ك ن [ب] – 7 ف ك ز: و ك د [ب] / س ك ن: س ل ن [س] / ف ك ز: ن ك ر [س] – 8 ف ك: ب ك [س] – 8-11 ز ف (الثانية) ... س ص: ناقصة [ب] – 11 ح و: ح ق [س] / ح ل: حـ د [ب] – 12 ي ث: ي ن [س] – 13 ح و: ح ف [س]

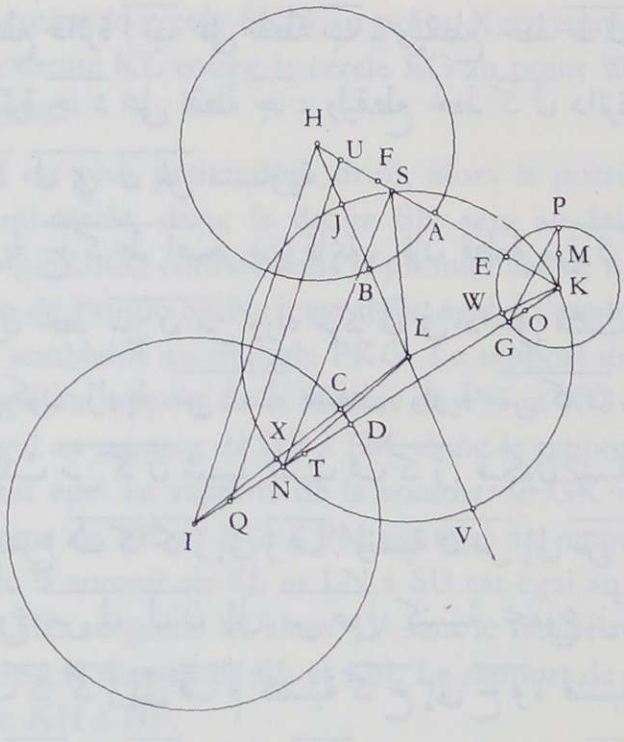


Fig. 44

Démonstration: En effet, il ne peut pas en être autrement. Si cela était possible, que HJ soit plus grande que HF. Posons le rapport de HJ à HO' égal au rapport de KH à HJ, alors HO' sera plus grande que HU, car le produit de KH par HU est égal au carré de HF, le produit de KH par HO' est égal au carré de HJ, mais HJ est plus grande que HF, donc HO' est plus
S. 333v grande que HU. Mais puisque le produit de VH par HJ / est égal au produit
B. 84v de KH par HS, le rapport de KH à HJ / est égal au rapport de VH à HS. Mais le rapport de KH à HJ est égal au rapport de JH à HO'. Le rapport de VH à HS est donc égal au rapport de JH à HO', donc la droite HO' est plus petite que la droite HS. Or, on a montré qu'elle était plus grande que la droite HU, donc le point O' est entre les deux points U et S.

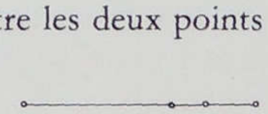
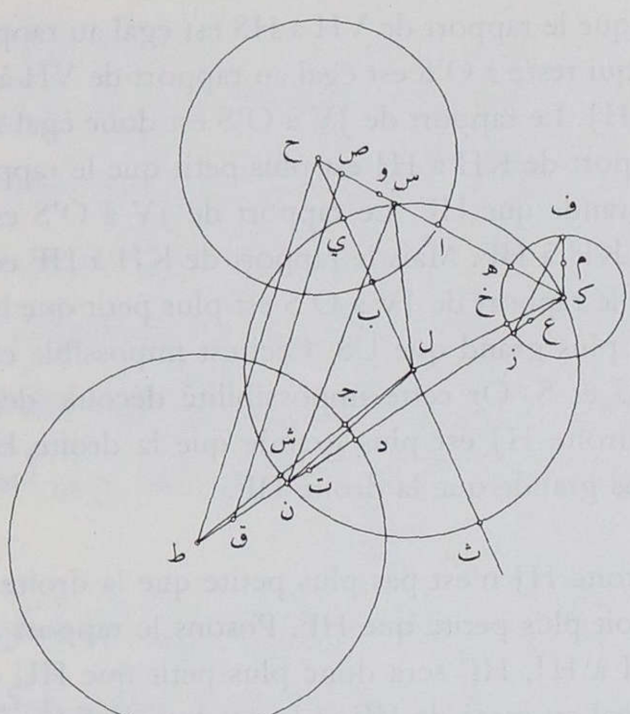
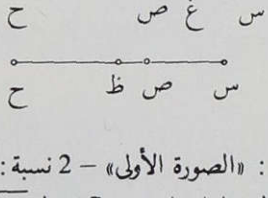


Fig. 44a



برهان ذلك : أنه لا يمكن غيره. فإن أمكن ، فليكن ح ي أعظم من ح و. ونجعل نسبة ح ي إلى ح غ كنسبة ك ح إلى ح ي ، فيكون ح غ أعظم من ح ص ، لأن ضرب ك ح في ح ص مثل مربع ح و، وضرب ك ح في ح غ مثل مربع ح ي ، وح ي أعظم من ح و، فـح غ أعظم من ح ص. ولأن ضرب ث ح في ح ي / مثل ضرب س - ٣٣٣ - و
ك ح في ح س، يكون نسبة ك ح إلى ح ي / كنسبة ث ح إلى ح س. ونسبة ك ح ب - ٨٤ - ظ
إلى ح ي هي كنسبة ي ح إلى ح غ. فنسبة ث ح إلى ح س هي كنسبة ي ح إلى ح غ ، فخط ح غ أصغر من خط ح س. وقد تبيّن أنه أعظم من خط ح ص ، فنقطة غ فيما بين نقطتي ص س.



كتب ناسخ [ب] بإزاء هذا الشكل (الأول) : «الصورة الأولى» – 2 نسبة : ناقصة [س] / ح غ : غالبًا ما كتبها ناسخ [ب] «حع» أو «جع» وناسخ [س] «ح ع»، ولن نشير إلى مثلها فيما بعد – 7 فخط ح غ : ناقصة [س] / خط (الأولى) : ناقصة [ب] – [ب] ليس هذا الشكل (الثانية) في المخطوطتين

De même, puisque le rapport de VH à HS est égal au rapport de JH à HO', le rapport de VJ qui reste à O'S est égal au rapport de VH à HS et est égal au rapport de KH à HJ. Le rapport de JV à O'S est donc égal au rapport de KH à HJ. Mais le rapport de KH à HJ est plus petit que le rapport de KH à HF, car HJ est plus grande que HF. Le rapport de JV à O'S est donc plus petit que le rapport de KH à HF. Mais le rapport de KH à HF est égal au rapport de JV à US, donc le rapport de JV à O'S est plus petit que le rapport de JV à US, O'S est donc plus grand que US. Ceci est impossible car le point O' est entre les points U et S. Or cette impossibilité découle de notre hypothèse selon laquelle la droite HJ est plus grande que la droite HF. La droite HJ n'est donc pas plus grande que la droite HF.

Je dis que la droite HJ n'est pas plus petite que la droite HF. Si cela était possible, qu'elle soit plus petite que HF. Posons le rapport de HJ à HI' égal au rapport de KH à HJ, HI' sera donc plus petit que HU car le produit de KH par HU est égal au carré de HF et le produit de KH par HI' est égal au carré de HJ. Mais HJ est plus petit que HF, donc HI' est plus petit que HU. Mais puisque le produit de VH par HJ est égal au produit de KH par HS, le rapport de KH à HJ est égal au rapport de VH à HS. Mais le rapport de KH à HJ est égal au rapport de JH à HI', donc le rapport de VH à HS est égal au rapport de JH à HI' et est égal au rapport du reste, qui est JV, au reste qui est I'S. Donc le rapport de JV à I'S est égal au rapport de KH à HJ et le rapport de KH à HJ est plus grand que le rapport de KH à HF, car HJ est plus petite que HF; donc le rapport de JV à I'S est plus grand que le rapport de KH à HF. Mais le rapport de KH à HF est égal au rapport de JV à US, donc le rapport de JV à I'S est plus grand que le rapport de JV à US, et alors la droite I'S est plus petite que la droite US. Ceci est impossible car la droite HI' est plus petite que la droite HU. Cette impossibilité découle de notre hypothèse selon laquelle la droite HJ est plus petite que la droite HF. Donc la droite HJ n'est ni plus petite que la droite HF, ni plus grande qu'elle, alors la

وأيضاً، فلأن نسبة ث ح إلى ح س كنسبة ي ح إلى ح غ، يكون نسبة ث ي الباقي إلى غ س كنسبة ث ح إلى ح س وكنسبة ك ح إلى ح ي. فنسبة ي ث إلى غ س كنسبة ك ح إلى ح ي. ونسبة ك ح إلى ح ي هي أصغر من نسبة ك ح إلى ح و، لأن ح ي أعظم من ح و. فنسبة ي ث إلى غ س أصغر من نسبة ك ح إلى ح و. ونسبة ك ح إلى ح و هي كنسبة ي ث إلى ص س، فنسبة ي ث إلى غ س أصغر من نسبة ي ث إلى ص س. فـ غ س أعظم من ص س. فهذا محال لأن نقطة غ هي فيما بين نقطتي ص س. وهذا المحال عرض من فرضنا خط ح ي أعظم من خط ح و، فليس خط ح ي بأعظم من خط ح و.

فأقول: إن خط ح ي ليس هو أصغر من خط ح و. فإن أمكن، فليكن أصغر من ح و. ونجعل نسبة ح ي إلى ح ظ كنسبة ك ح إلى ح ي، فيكون ح ظ أصغر من ح ص، لأن ضرب ك ح في ح ص مثل مربع ح و، وضرب ك ح في ح ظ مثل مربع ح ي. وح ي أصغر من ح و، فـ ح ظ أصغر من ح ص. ولأن ضرب ث ح في ح ي مثل ضرب ك ح في ح س، يكون نسبة ك ح إلى ح ي كنسبة ث ح إلى ح س. ونسبة ك ح إلى ح ي هي كنسبة ي ح إلى ح ظ، فنسبة ث ح إلى ح س هي كنسبة ي ح إلى ح ظ وكنسبة الباقي – وهو ي ث – إلى الباقي وهو ظ س. فنسبة ي ث إلى ظ س كنسبة ك ح إلى ح ي ونسبة ك ح إلى ح ي هي أعظم من نسبة ك ح إلى ح و، لأن ح ي أصغر من ح و؛ فنسبة ي ث إلى ظ س أعظم من نسبة ك ح إلى ح و. ونسبة ك ح إلى ح و هي كنسبة ي ث إلى ص س، فنسبة ي ث إلى ظ س أعظم من نسبة ي ث إلى ص س، فخط ظ س أصغر من خط ص س، وهذا محال، لأن خط ح ظ أصغر من خط ح ص. وهذا المحال عرض من فرضنا خط ح ي أصغر من خط ح و. فليس خط ح ي بأصغر من خط ح و ولا هو أعظم منه، فخط

4 ح و (الثانية): ح ق [ب] – 6 فهذا: وهذا [ب، س] – 7 ح و: غالبًا ما كتبها ناسخ [ب] «جو» ولن نشير إلى مثلها مرة أخرى – 8 ح و: كرر بعدها «فليس خط ح ي»، ثم ضرب عليها بالقلم [ب] – 9-10 من ح و: ناقصة [س] – 10 ح ظ: ح ط، غالبًا ما كتبها هكذا ولن نشير إليها فيما بعد [ب، س] – 15 ي ث (الأولى): ث ي [س] – 16 ونسبة ك ح إلى ح ي: ناقصة [ب] – 18 هي: ناقصة [ب]

droite HJ est égale à la droite HF. Mais HB est égale à HA, il reste JB égale à FA et FA égale à KE, c'est-à-dire WK, donc la droite JB est égale à la droite KW, or JL est égale à LK, il reste BL égal à WL. Par une méthode analogue, on montre que la droite IX est égale à la droite IT, et la droite XC est égale à la droite KW, il reste CL égale à WL. Donc les droites LB, LW et LC sont toutes les trois égales. Posons L comme centre et traçons avec la distance LB un cercle, soit le cercle BCW, ce cercle est tangent aux trois cercles car il rencontre chacun de ces cercles en un point de la droite qui joint son centre au centre de chacun de ces cercles. En effet, si on mène du point B une perpendiculaire à la droite HL, elle est tangente au cercle AB. Elle est tangente au cercle AB et elle est tangente au cercle BCW. Donc le cercle BCW est tangent au cercle AB au point B. De même, on montre qu'il est tangent au cercle CD au point C et qu'il est tangent au cercle EG au point W. Donc le
S. 334r cercle BCW est tangent aux trois cercles. Ce qu'il fallait faire./

Si l'angle HKI est droit, alors la droite SN est un diamètre du cercle ⟨SKN⟩ comme nous l'avons montré dans le deuxième cas de figure. Le rapport de NS à SU est égal au rapport de GP, diamètre du cercle EG, à PM, et le rapport de SN à NQ est égal au rapport de PG à GO. Le reste de la construction se fait comme précédemment.

ح ي مثل خط ح و. وح ب مثل ح ا ، فيبقى ي ب مثل و ا ، ووا مثل ک ه ، أعني خ ک ، فخط ي ب مثل خط ک خ ، وي ل مثل ل ک ، فيبقى ب ل مثل خ ل. وبمثل هذا الطريق يتبين أن خط ط ش مثل خط ط ت ، ويكون خط ش ج مثل خط ک خ ، فيبقى ج ل مثل خ ل. فخطوط ل ب ل خ ل ج الثلاثة متساوية. فنجعل ل مركزاً ونديرِ ببعد ل ب دائرة، ولتكن دائرة ب ج خ ، فهذه الدائرة تماس الدوائر الثلاث لأنها تلقى كل واحدة من هذه الدوائر على نقطة من الخط الواصل بين مركزها ومركز تلك الدوائر؛ وذلك أن نقطة ب إذا خرج منها عمود على خط ح ل فهو يماس دائرة ا ب. وهو يماس دائرة ا ب وهو يماس دائرة ب ج خ. فدائرة ب ج خ تماس دائرة ا ب على نقطة ب. وكذلك يتبيّن أنها تماس دائرة ج د على نقطة ج وتماس دائرة ه ز على نقطة خ. فدائرة ب ج خ تماس الدوائر الثلاث؛ وذلك ما أردنا أن نعمل. / س - ٣٣٤ - ظ

وإن كانت زاوية ح ک ط قائمة، فإن خط س ن يكون قطراً للدائرة، كما تبيّن في الصورة الثانية. ويكون نسبة ن س إلى س ص كنسبة ز ف - الذي هو قطر دائرة ه ز - إلى ف م ، ونسبة س ن إلى ن ق كنسبة ف ز إلى ز ع. وتمام العمل على مثل ما تقدم.

1 ح ا : ج ا [ب] – 2 وي ل : وک ل [س] – 4 فيبقى : ويبقى [ب، س] – 7 الدوائر: الدائرة [س] – 8 وهو يماس دائرة ا ب : ناقصة [س] / ب ج خ (الأولى والثانية) : ب ح ح [س] – 9 ج وتماس : ح د تماس [س] – 10 ب ج خ : ب خ ح [س] – 11 ح ک ط : ح ط ک [ب] / قطرًا للدائرة : قطر الدائرة [س] / تبين: ناقصة [س] نبين [ب] – 12 ن س : ل س [ب] – 13 ف ز : د ر [س]

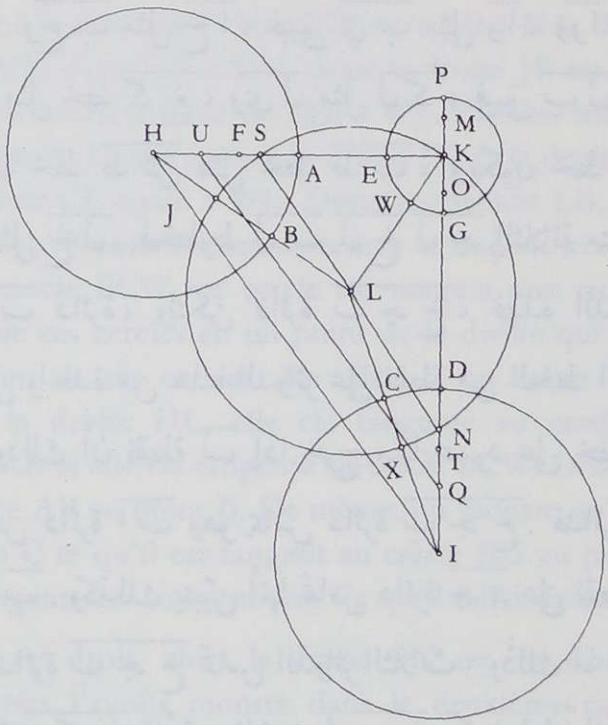
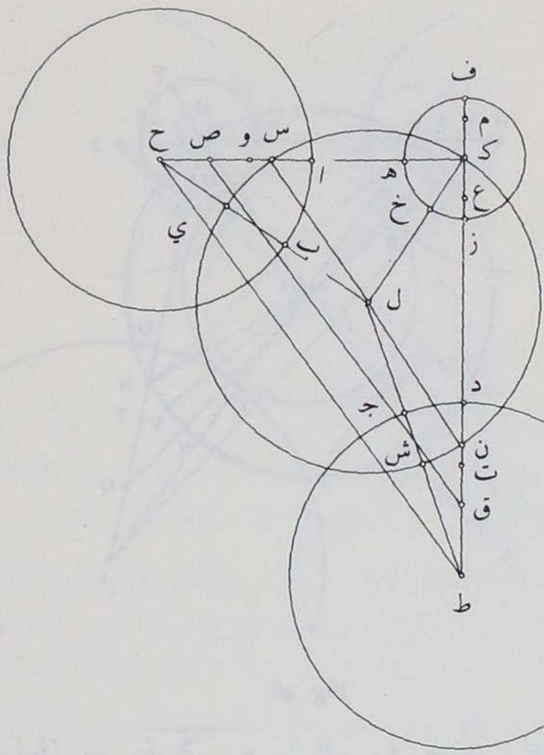


Fig. 45

Si l'angle HKI est plus grand qu'un droit, alors la droite NS peut être à l'extérieur du triangle ⟨UKQ⟩ comme dans le troisième cas de figure; elle peut être à l'intérieur du triangle UKQ et le centre du cercle sera à l'extérieur
B. 85ʳ du triangle SKN; la droite NS peut être elle-même la droite KQ,/ comme nous le montrerons ensuite. Le reste de la démonstration se fera comme précédemment, c'est-à-dire que nous montrerons, dans les deux cas de figure, que la droite HJ est égale à la droite HF et que la droite IX est égale à la droite IT et ainsi s'achève la démonstration.



وإن كانت زاوية ح ك ط أعظم من قائمة، فإن خط ن س ربما كان خارج المثلث، كما في الصورة الثالثة، وربما كان في داخل مثلث ص ك ق، ويكون مركز الدائرة خارجاً عن مثلث س ك ن، وربما كان خط ن س هو نفس خط ك ق، / كما ب - ٨٥ - و
يتبيّن فيما بعد. وتمام البرهان على مثل ما تقدم، وهو أن نبيّن في كلتا الصورتين أن خط ح ي مساوٍ لخط ح و وأن خط ط ش مساوٍ لخط ط ت، فقد تمّ البرهان.

كتب ناسخ [ب] بإزاء هذا الشكل: «الصورة الثانية» – 1 كانت: كان [ب] – 3 نفس: والأفصح أن يكون التأكيد بعد المؤكّد لا قبله، وتركناها كما هي / ك ق: ق ك [س] – 4 كلتا: كلتي [ب، س] – 5 ط ش: ح ش [ب] / فقد: وقد [س]

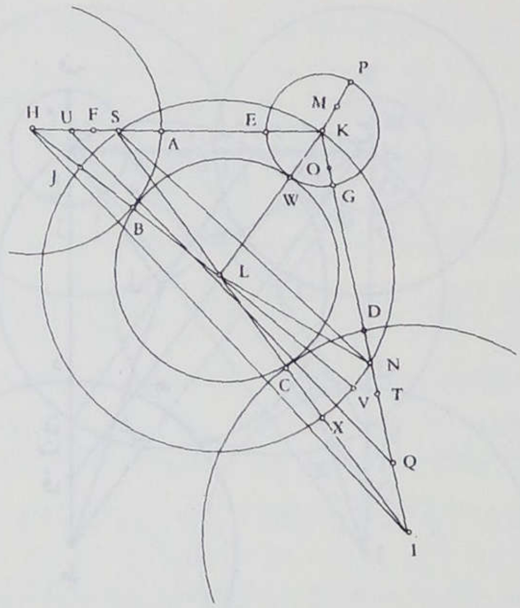
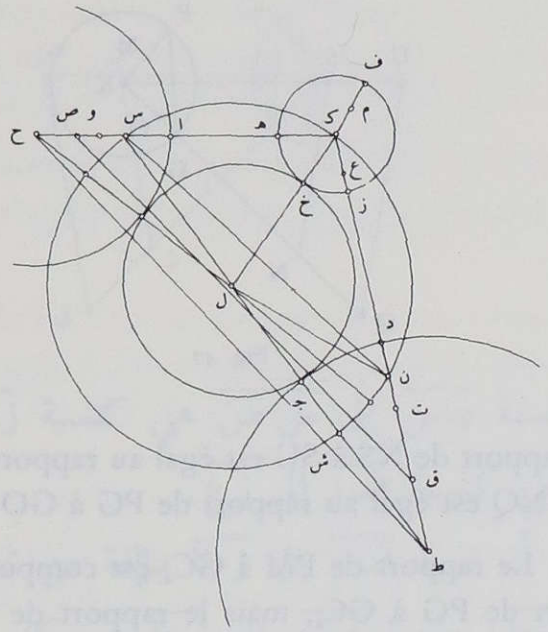


Fig. 46

Il nous reste à montrer comment mener dans le triangle UKQ de forme connue une droite comme la droite NS de sorte que le rapport de NS à SU soit égal au rapport de GP à PM et que le rapport de NS à NQ soit égal au rapport de GP à GO.

L'analyse de cette prémisse a été montrée dans l'analyse du problème; il reste à procéder à la synthèse de cette analyse pour que le problème s'achève.

Nous supposons donné le triangle UKQ, puis nous examinons: si le rapport de PM à OG est égal au rapport de UK à KQ et si l'angle QKU est plus petit qu'un droit, alors nous posons le rapport de PG — qui est dans le premier cas de figure — à GC_a égal au rapport de QU à UK. Nous divisons la droite UK au point S de sorte que le rapport de US à SK soit égal au rapport de PM à GC_a. Menons du point S la droite SN parallèle à la droite UQ.



فقد بقي أن نبيّن كيف نخرج في مثلث ص ك ق – المعلوم الصورة – خطاً مثل خط ن س حتى يكون نسبة ن س إلى س ص كنسبة ز ف إلى ف م، ويكون نسبة ن س إلى ن ق كنسبة ز ف إلى ز ع.

وتحليل هذه المقدمة قد تبيّن في تحليل المسألة؛ فقد بقي أن نركب ذلك التحليل لتتمّ المسألة.

فنفرض مثلث ص ك ق ثم ننظر: فإن كانت نسبة ف م إلى ع ز كنسبة ص ك إلى ك ق وكانت زاوية ق ك ص أصغر من قائمة، فإنا نجعل نسبة ف ز – الذي في الصورة الأولى – إلى ز جا كنسبة ق ص إلى ص ك. ونقسم خط ص ك على نقطة س حتى يكون نسبة ص س إلى س ك كنسبة ف م إلى ز جا. ونخرج من نقطة س خط س ن موازياً لخط ص ق.

كتب ناسخ [ب] بإزاء هذا الشكل: «الصورة الثالثة» – 2-3 إلى س ص ... ن س : ناقصة [ب] – 6 ننظر : ينظر [س] – 7 ق ك ص : ح ك ص [س] – 8 ز جا : رح [ب] رحـ [س]، أثبتناها هكذا، هنا وفيما بعد، حتى لا تختلط الحروف

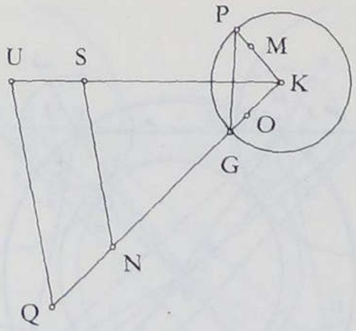
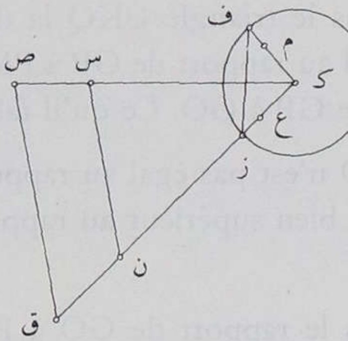


Fig. 47

Je dis que le rapport de NS à SU est égal au rapport de GP à PM et que le rapport de SN à NQ est égal au rapport de PG à GO.

Démonstration : Le rapport de PM à GC_a est composé du rapport de PM à PG et du rapport de PG à GC_a, mais le rapport de PM à GC_a est égal au rapport de US à SK, donc le rapport de US à SK est composé du rapport de PM à PG et du rapport de PG à GC_a. Mais le rapport de PG à GC_a est égal au rapport de QU à UK qui est égal au rapport de NS à SK, donc le rapport de US à SK est composé du rapport de PM à PG et du rapport de NS à SK. Mais le rapport de US à SK est composé du rapport de US à SN et du rapport de NS à SK. Le rapport composé du rapport de US à SN et du rapport de SN à SK est égal au rapport composé du rapport de PM à PG et du rapport de NS à SK. Nous éliminons le rapport de NS à SK qui est commun, il reste le rapport de US à SN égal au rapport de PM à PG. Donc le rapport de NS à SU est égal au rapport de GP à PM. Mais le rapport de SU à NQ est égal au rapport de UK à KQ. Or, le rapport de PM à GO est égal au rapport de UK
S. 334^v à KQ, donc le rapport de SU à NQ est égal au rapport de PM à GO./ Par le rapport d'égalité, le rapport de SN à NQ est égal au rapport de PG à GO.



فأقول : إن نسبة ن س إلى س ص هي كنسبة ز ف إلى ف م وإن نسبة س ن إلى ن ق هي كنسبة ف ز إلى ز ع.

برهان ذلك : أن نسبة ف م إلى ز جا مؤلفة من نسبة ف م إلى ف ز ومن نسبة ف ز إلى ز جا، ونسبة ف م إلى ز جا هي كنسبة ص س إلى س ك، فنسبة ص س إلى س ك مؤلفة من نسبة ف م إلى ف ز ومن نسبة ف ز إلى ز جا. ونسبة ف ز إلى ز جا هي كنسبة ق ص إلى ص ك التي هي كنسبة ن س إلى س ك، فنسبة ص س إلى س ك مؤلفة من نسبة ف م إلى ف ز ومن نسبة ن س إلى س ك. لكن نسبة ص س إلى س ك هي مؤلفة من نسبة ص س إلى س ن ومن نسبة ن س إلى س ك. فالنسبة المؤلفة من نسبة ص س إلى س ن ومن نسبة س ن إلى س ك هي النسبة المؤلفة من نسبة ف م إلى ف ز ومن نسبة ن س إلى س ك. فنسقط نسبة ن س إلى س ك المشتركة، فتبقى نسبة ص س إلى س ن كنسبة ف م إلى ف ز، فنسبة ن س إلى س ص كنسبة ز ف إلى ف م. ونسبة س ص إلى ن ق كنسبة ص ك إلى ك ق. ونسبة ف م إلى ز ع هي كنسبة ص ك إلى ك ق، فنسبة س ص إلى ن ق كنسبة ف م إلى ز ع. / ففي نسبة س – ٣٣٤ – ظ
المساواة تكون نسبة س ن إلى ن ق كنسبة ف ز إلى ز ع. فقد أخرجنا في مثلث

1 ن س : ف س [س] / هي : ناقصة [س] – 3 ف م (الأولى) : ن م [س] – 9 فالنسبة : فالنسب [ب] – 11 س ك (الأولى) : ش ك [ب] – 13 ن ق : ف ق [س] – 14 س ص : ش ص [ب] / ن ق : ف ق [س]

Nous avons donc mené dans le triangle UKQ la droite NS de sorte que le rapport de NS à SU soit égal au rapport de GP à PM et que le rapport de NS à NQ soit égal au rapport de GP à GO. Ce qu'il fallait faire.

Si le rapport de PM à GO n'est pas égal au rapport de UK à KQ, alors le rapport de PM à GO est ou bien supérieur au rapport de UK à KQ ou bien lui est inférieur.

S'il lui est inférieur, alors le rapport de GO à PM est plus grand que le rapport de KQ à KU. L'un des deux rapports de GO à PM ou de PM à GO est plus grand que l'un des deux rapports de UK à KQ ou de KQ à KU. Que le rapport de GO à PM soit plus grand que le rapport de KQ à KU. Posons alors le rapport de PM à GF égal au rapport de UK à KQ, mais l'angle UKQ est plus petit qu'un droit comme on l'a montré dans le premier cas de figure. Construisons sur la droite PG une portion de cercle interceptée par un angle égal à l'angle KQU, soit la portion PJG; menons-y la corde GJ égale à la droite FO et joignons FJ. Menons du point U une droite qui entoure avec la droite UQ un angle égal à l'angle GPJ, soit la droite UD, elle engendre donc le triangle UQD tel que le rapport de UD à DQ soit égal au rapport de PG à GJ. Menons dans le triangle UKD la droite parallèle à la droite UD telle que son rapport à ce qu'elle sépare de la droite KU soit égal au rapport de PG à PM et que son rapport à ce qu'elle sépare de la droite KD soit égal au rapport de PG à GF, comme nous l'avons fait dans la proposition précédente, soit la droite SN.

ص ك ق خط ن س حتى صارت نسبة ن س إلى س ص كنسبة ز ف إلى ف م ونسبةُ ن س إلى ن ق كنسبة ز ف إلى ز ع ؛ وذلك ما أردنا أن نعمل.

وإن كانت نسبة ف م إلى ز ع ليست كنسبة ص ك إلى ك ق ، فإن نسبة ف م إلى ز ع إما أن تكون أعظم من نسبة ص ك إلى ك ق وإما أن تكون أصغر منها.

وإذا كانت أصغر منها ، فإن نسبة ز ع إلى ف م تكون أعظم من نسبة ك ق إلى ك ص. فإحدى نسبتي ز ع إلى ف م وف م إلى ز ع أعظم من إحدى نسبتي ص ك إلى ك ق وك ق إلى ك ص. فلتكن نسبة ز ع إلى ف م أعظم من نسبة ك ق إلى ك ص. فنجعل نسبة ف م إلى ز و كنسبة ص ك إلى ك ق ؛ ولكن زاوية ص ك ق أصغر من قائمة ، كما تبيّن في الصورة الأولى. ونعمل على خط ف ز قطعة دائرة تقبل زاوية مثل زاوية ك ق ص ولتكن قطعة ف ي ز ، ونخرج فيها وتر ز ي مساوياً لخط و ع ونصل ف ي. ونخرج من نقطة ص خطاً يحيط مع ⟨خط⟩ ص ق بزاوية مساوية لزاوية ز ف ي ، وليكن هو خط ص د ، فيحدث مثلث ص ق د وتكون نسبة ص د إلى د ق كنسبة ف ز إلى ز ي ، فنخرج في مثلث ص ك د خطاً موازياً لخط ص د وتكون نسبته إلى ما يفصله من خط ك ص كنسبة ف ز إلى ف م ، وتكون نسبته إلى ما يفصله من خط ك د كنسبة ف ز إلى ز و ، كما عملنا في الشكل الذي قبل هذا الشكل، وليكن خط س ن.

1 ص ك ق : ص ق [ب] – 2 ن ق : ف ق [س] – 6 وإذا كانت أصغر منها : ناقصة [ب] / ك ق : ق ك [س] – 8 ك ق : ق ك [س] – 9 ك ص : ك م [ب] / ف م : ن م [س] / ز و : ر ق [ب] / ولكن : وليكن [س] / ص ك ق : ص ك [ب] – 10 تبين : ناقصة [س] – 11 ف ي ز : ف ب ر [ب] – 11-12 ونخرج ... ف ي : ناقصة [ب] – 13 هو : و [ب] ناقصة [س] / ص ق د : ص ك و [ب] ص ك د [س] / وتكون : وليكن [س] – 15 ف ز : ر ف [س] – 16 ك د : ك ر [ب] / ز و : ز ف [ب]

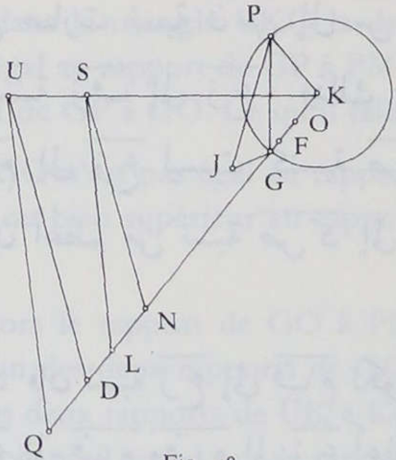


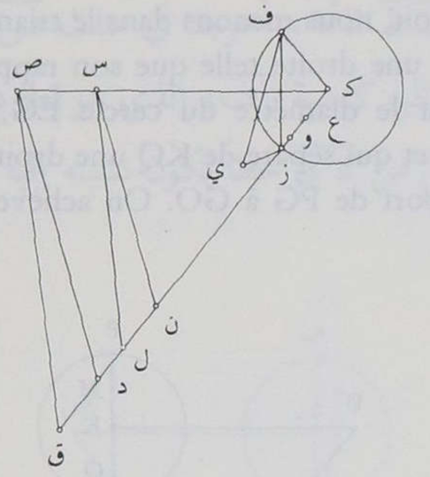
Fig. 48

B. 85v Je dis / que le rapport de SN à NQ est égal au rapport de PG à GO.

Démonstration : Menons du point S la droite SL parallèle à la droite UQ, alors le triangle SLN est semblable au triangle UDQ, donc le rapport de SN à NL est égal au rapport de UD à DQ. Mais le rapport de UD à DQ est égal au rapport de PG à GJ, il est donc égal au rapport de PG à FO, donc le rapport de SN à NL est égal au rapport de PG à FO, alors le rapport de LN à NS est égal au rapport de FO à GP. Mais le rapport de NS à SU est égal au rapport de GP à PM et le rapport de SU à LQ est égal au rapport de UK à KQ qui est égal au rapport de PM à GF. Par le rapport d'égalité, le rapport de NL à LQ est égal au rapport de OF à FG, donc le rapport de NQ à QL est égal au rapport de OG à GF et le rapport de QN à NL est égal au rapport de GO à OF. Mais le rapport de LN à NS est égal au rapport de OF à GP, donc le rapport de QN à NS est égal au rapport de GO à GP. Le rapport de SN à NQ est donc égal au rapport de PG à GO. Mais le rapport de NS à SU est égal au rapport de GP à PM. On a donc mené dans le triangle UKQ une
S. 335r droite suivant les rapports cherchés[23]. Ce qu'il fallait / faire.

Cette construction est faite à partir de 〈l'hypothèse〉 selon laquelle l'angle HKI est plus petit qu'un droit, comme dans le premier cas de figure.

23. Littéralement: le rapport cherché.



ب – ٨٥ – ظ فأقول : / إن نسبة س ن إلى ن ق هي كنسبة ف ز إلى ز ع.

برهان ذلك : أنا نخرج من نقطة س خط س ل موازياً لخط ص ق، فيكون مثلث س ل ن شبيهاً بمثلث ص د ق، فيكون نسبة س ن إلى ن ل كنسبة ص د إلى د ق. ونسبة ص د إلى د ق هي كنسبة ف ز إلى ز ي، فهي كنسبة ف ز إلى و ع؛ فنسبة س ن إلى ن ل كنسبة ف ز إلى و ع فنسبة ل ن إلى ن س كنسبة و ع إلى ز ف. ونسبة ن س إلى س ص كنسبة ز ف إلى ف م، ونسبة س ص إلى ل ق كنسبة ص ك إلى ك ق التي هي كنسبة ف م إلى ز و، ففي نسبة المساواة يكون نسبة ن ل إلى ل ق كنسبة ع و إلى و ز، فنسبة ن ق إلى ق ل كنسبة ع ز إلى ز و، فنسبة ق ن إلى ن ل كنسبة ز ع إلى ع و. ونسبة ل ن إلى ن س كنسبة ع و إلى ز ف، فنسبة ق ن إلى ن س هي كنسبة ز ع إلى ز ف. فنسبة س ن إلى ن ق كنسبة ف ز إلى ز ع. ونسبة ن س إلى س ص هي كنسبة ز ف إلى ف م. فقد أخرجنا في مثلث ص ك ق خطاً على النسبة المطلوبة؛ وذلك ما أردنا / أن نعمل. س – ٣٣٥ –

وهذا العمل هو على أن زاوية ح ك ط أصغر من قائمة على ما في الصورة الأولى.

3 س ل ن : س ك ن [ب] / ن ل : ف ل [س] – 5 إلى و ع : كتب بعدها ناسخ [ب] «فنسبة ل ن إلى و ا ع» / و ع إلى ز ف ونسبة : ناقصة [ب] – 6 ن س : ر س [ب] – 7 ز و : ز ف [س] – 9 ع و (الأولى والثانية) : ع ف [س] / ق ن : ف ن [س] – 10 هي : ناقصة [ب] / ز ع (الأولى) : ن ع [ب] / ن س : ل س [ب] – 11 النسبة : نسبة [س] – 13 ح ك ط : ح ك ص [ب، س] / على ما : كما [ب]

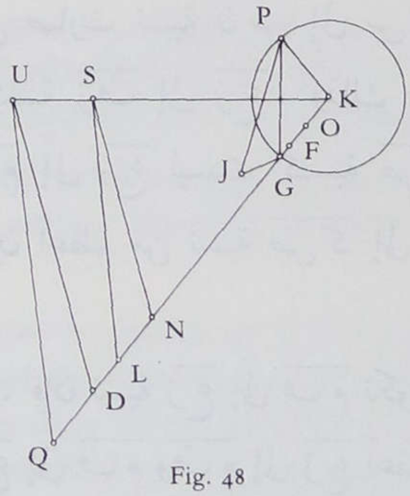


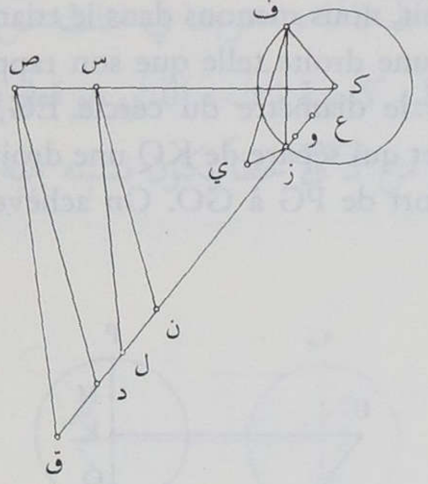
Fig. 48

B. 85v Je dis / que le rapport de SN à NQ est égal au rapport de PG à GO.

Démonstration : Menons du point S la droite SL parallèle à la droite UQ, alors le triangle SLN est semblable au triangle UDQ, donc le rapport de SN à NL est égal au rapport de UD à DQ. Mais le rapport de UD à DQ est égal au rapport de PG à GJ, il est donc égal au rapport de PG à FO, donc le rapport de SN à NL est égal au rapport de PG à FO, alors le rapport de LN à NS est égal au rapport de FO à GP. Mais le rapport de NS à SU est égal au rapport de GP à PM et le rapport de SU à LQ est égal au rapport de UK à KQ qui est égal au rapport de PM à GF. Par le rapport d'égalité, le rapport de NL à LQ est égal au rapport de OF à FG, donc le rapport de NQ à QL est égal au rapport de OG à GF et le rapport de QN à NL est égal au rapport de GO à OF. Mais le rapport de LN à NS est égal au rapport de OF à GP, donc le rapport de QN à NS est égal au rapport de GO à GP. Le rapport de SN à NQ est donc égal au rapport de PG à GO. Mais le rapport de NS à SU est égal au rapport de GP à PM. On a donc mené dans le triangle UKQ une
S. 335r droite suivant les rapports cherchés[23]. Ce qu'il fallait / faire.

Cette construction est faite à partir de ⟨l'hypothèse⟩ selon laquelle l'angle HKI est plus petit qu'un droit, comme dans le premier cas de figure.

23. Littéralement: le rapport cherché.



ب – ٨٥ – ظ فأقول : / إن نسبة س ن إلى ن ق هي كنسبة ف ز إلى ز ع.

برهان ذلك : أنا نخرج من نقطة س خط س ل موازياً لخط ص ق، فيكون مثلث س ل ن شبيهاً بمثلث ص د ق، فيكون نسبة س ن إلى ن ل كنسبة ص د إلى د ق. ونسبة ص د إلى د ق هي كنسبة ف ز إلى زي، فهي كنسبة ف ز إلى و ع؛ فنسبة س ن إلى ن ل كنسبة ف ز إلى و ع فنسبة ل ن إلى ن س كنسبة و ع إلى ز ف. ونسبة ن س إلى س ص كنسبة ز ف إلى ف م، ونسبة س ص إلى ل ق كنسبة ص ك إلى ك ق التي هي كنسبة ف م إلى زو. ففي نسبة المساواة يكون نسبة ن ل إلى ل ق كنسبة ع و إلى و ز، فنسبة ن ق إلى ق ل كنسبة ع ز إلى زو، فنسبة ق ن إلى ن ل كنسبة ز ع إلى ع و. ونسبة ل ن إلى ن س كنسبة ع و إلى زف، فنسبة ق ن إلى ن س هي كنسبة زع إلى زف. فنسبة س ن إلى ن ق كنسبة ف ز إلى زع. ونسبة ن س إلى س ص هي كنسبة ز ف إلى ف م. فقد أخرجنا في مثلث ص ك ق خطاً على النسبة

س – ٣٣٥ – و المطلوبة؛ وذلك ما أردنا / أن نعمل.

وهذا العمل هو على أن زاوية ح ك ط أصغر من قائمة على ما في الصورة الأولى.

3 س ل ن : س ك ن [ب] / ن ل : ف ل [س] – 5 إلى وع : كتب بعدها ناسخ [ب] «فنسبة ل ن إلى و اع» / وع إلى زف ونسبة : ناقصة [ب] – 6 ن س : ر س [ب] – 7 زو: زف [س] – 9 ع و (الأولى والثانية) : ع ف [س] / ق ن : ف ن [س] – 10 هي: ناقصة [ب] / زع (الأولى) : ن ع [ب] / ن س : ل س [ب] – 11 النسبة : نسبة [س] – 13 ح ك ط : ح ك ص [ب، س] / على ما : كما [ب]

Si l'angle HKI est droit, nous menons dans le triangle UKQ une droite qui sépare de la droite UK une droite telle que son rapport à celle-ci est égal au rapport de GP, qui est le diamètre du cercle EG, à PM, comme dans le deuxième cas de figure, et qui sépare de KQ une droite telle que son rapport à celle-ci est égal au rapport de PG à GO. On achève la construction comme précédemment.

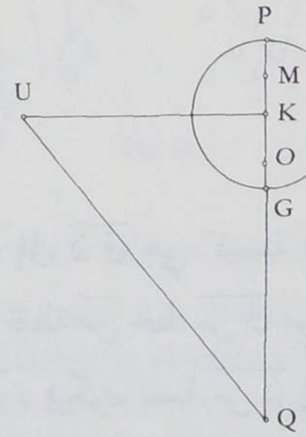
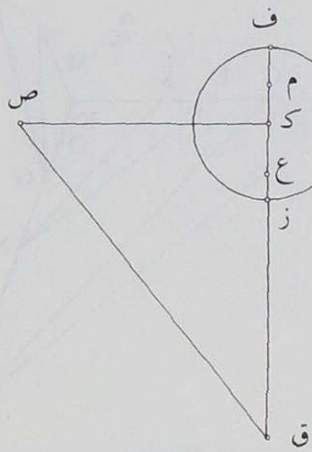


Fig. 49

Si l'angle HKI est plus grand qu'un droit comme dans le troisième cas de figure, alors l'un des deux rapports de GO à PM ou de PM à GO est plus petit que l'un des deux rapports de UK à KQ ou de QK à KU. Que le rapport de GO à PM soit plus petit que le rapport de QK à KU. Posons le rapport de GO à PF égal au rapport de QK à KU. Construisons sur la droite GP une portion de cercle interceptée par un angle égal à l'angle QUK, soit la portion PJG, sur laquelle nous menons la droite PJ égale à la droite MF, et joignons GJ. Construisons sur la droite UQ à son point Q un angle égal à l'angle PGJ, soit l'angle UQC. Il se forme un triangle QKC et un triangle QUC. Le triangle QUC sera semblable au triangle PGJ. Le rapport de QC à CU sera donc égal au rapport de GP à PJ. Menons dans le triangle QKC une droite parallèle à la droite QC qui sépare de la droite KQ une droite telle que

24. C'est-à-dire, la droite séparée.

فإن كانت زاوية ح ك ط قائمة، أخرجنا في مثلث ص ك ق خطاً يفصل من خط ص ك خطاً يكون نسبته إليه كنسبة ز ف، الذي هو قطر دائرة هـ ز، إلى ف م على ما في الصورة الثانية، فنفصل من ك ق خطاً يكون نسبته إليه كنسبة ف ز إلى ز ع. وتمام العمل على مثل ما تقدم.



وإن كانت زاوية ح ك ط أعظم من قائمة، على ما في الصورة الثالثة، تكن إحدى نسبتي ز ع إلى ف م وف م إلى ز ع أصغر من إحدى نسبتي ص ك إلى ك ق وق ك إلى ك ص. فليكن نسبة ز ع إلى ف م أصغر من نسبة ق ك إلى ك ص. ونجعل نسبة ز ع إلى ف و كنسبة ق ك إلى ك ص. ونعمل على خط ز ف قطعة دائرة تقبل زاوية مثل زاوية ق ص ك، ولتكن قطعة ف ي ز، ونخرج فيها خط ف ي مثل خط م و، ونصل ز ي. ونعمل على خط ص ق على نقطة ق منه زاوية مساوية لزاوية ف ز ي، ولتكن زاوية ص ق ج. فيحدث مثلث ق ك ج ⟨ومثلث ق ص ج⟩. ويكون مثلث ق ص ج شبيهاً بمثلث ف ز ي. فيكون نسبة ق ج إلى ج ص كنسبة ز ف إلى ف ي. فنخرج في مثلث ق ك ج خطاً موازياً لخط ق ج يفصل من خط ك ق خطاً

2 هو: يكون [ب] – 3 فنفصل: ونفصل [س] فيفصل [ب] – 5 كانت: كان كانت [ب] / ح ك ط: كتب الكاف فوق السطر [س] / تكنْ: فتكون [ب، س]، جواب الشرط مجزوم لا يصح هنا اقترانه بالفاء – 8 ق ك: ك ق [ب] / إلى: كتبها فوق السطر [س] – 9 ف ي ز: ف ي د [س] – 12 ق ج: ف ج [س]

le rapport de la droite parallèle à celle-ci[24] soit égal au rapport de PG à GO et qui sépare de la droite KU une droite telle que le rapport de la droite parallèle à celle-ci soit égal au rapport de GP à PF, comme nous l'avons vu précédemment, soit la droite NS.

Je dis que le rapport de NS à SU est égal au rapport de GP à PM.

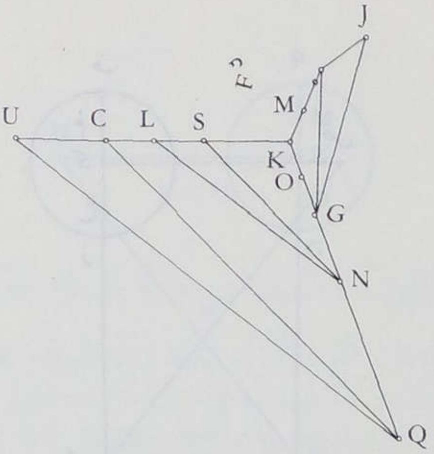
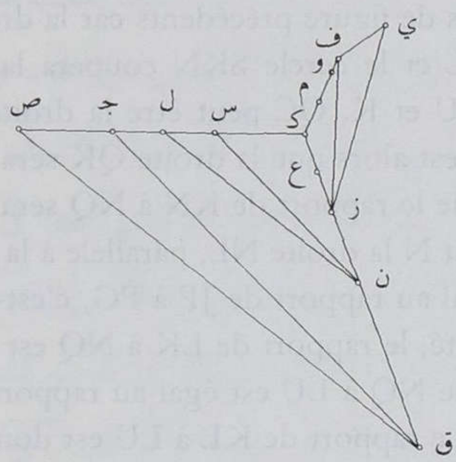


Fig. 50

Démonstration : Menons NL parallèle à QU, donc le triangle NLS est semblable au triangle QUC. Le rapport de LS à SN est donc égal au rapport de UC à CQ. Mais le rapport de UC à CQ est égal au rapport de JP à PG, donc le rapport de LS à SN est égal au rapport de JP à PG, c'est-à-dire de MF à PG, donc le rapport de LS à SN est égal au rapport de MF à PG. Mais le rapport de SN à NQ est égal au rapport de PG à GO et le rapport de NQ à LU est égal au rapport de QK à KU qui est égal au rapport de GO à FP. Par le rapport de l'égalité, le rapport de SL à LU est donc égal au rapport de MF à FP, *donc le rapport de US à SL est égal au rapport de PM à MF. Mais le* rapport de LS à SN est égal au rapport de MF à PG, donc le rapport de US à SN est égal au rapport de PM à PG. Le rapport de NS à SU est donc égal au rapport de GP à PM, et le rapport de SN à NQ est égal au rapport de PG à GO. Nous avons donc mené une droite NS selon la propriété cherchée. Ce
S. 335v qu'il fallait faire./

تكون نسبته إليه كنسبة ف ز إلى ز ع ، ويفصل من خط ك ص خطاً يكون نسبته إليه كنسبة ز ف إلى ف و، كما بينا فيما تقدم، وليكن خط ن س

فأقول : إن نسبة ن س إلى س ص كنسبة ز ف إلى ف م.



برهان ذلك : أنا نخرج ن ل موازياً لـ ق ص فيكون مثلث ن ل س شبيهاً بمثلث ق ص ج . فيكون نسبة ل س إلى س ن كنسبة ص ج إلى ج ق ونسبة ص ج إلى ج ق هي كنسبة ي ف إلى ف ز، فنسبة ل س إلى س ن كنسبة ي ف إلى ف ز، أعني م و وإلى ف ز، فنسبة ل س إلى س ن كنسبة م و وإلى ف ز. ونسبة س ن إلى ن ق كنسبة ف ز إلى ز ع، ونسبة ن ق إلى ل ص كنسبة ق ك إلى ك ص التي هي كنسبة ز ع إلى و ف، ففي نسبة المساواة تكون نسبة س ل إلى ل ص كنسبة م و وإلى و ف، فنسبة ص س إلى س ل كنسبة ف م إلى م و. ونسبة ل س إلى س ن كنسبة م و وإلى ف ز، فنسبة ص س إلى س ن كنسبة ف م إلى ف ز، فنسبة ن س إلى س ص كنسبة ز ف إلى ف م ، ونسبة س ن إلى ن ق كنسبة ف ز إلى ز ع . فقد أخرجنا خط ن س على الصفة المطلوبة ، وذلك ما أردنا أن نعمل. / س – ٣٣٥ –

1 ويفصل : ونفصل [ب] – 2 ف و: ف م [ب، س] – 4 ن ل : ن ك [س] / ق ص : ف ص [ب] / ن ل س : ف ل س [س] – 7 م و (الأولى) : م ف [س] – 8 ك ص : ك م [س] /كنسبة : نسبة [س] – 9 م و : م ف [س] / و ف : ر ف [ب] – 10-11 م و وإلى ف ز : م ف إلى د ر [س] – 12 س ن : ي ن [س]

Mais la droite QC peut tomber à l'extérieur du triangle QKU. Elle peut tomber à l'intérieur du triangle QKU et la figure est alors comme dans le cas de figure ⟨que nous avons donnée⟩ du triangle. Si elle tombe à l'extérieur du triangle, la figure sera comme dans le troisième cas de figure.

Or si la droite QC est à l'intérieur du triangle, alors le triangle sera semblable aux deux cas de figure précédents car la droite NS tombera entre le point K et le centre L et le cercle SKN coupera la droite UK en un point entre les deux points U et K. QC peut être la droite QK si l'angle PGJ est égal à l'angle UQK, c'est alors que la droite QK sera divisée en un point, soit le point N, de sorte que le rapport de KN à NQ sera égal au rapport de PG à GO. On mène du point N la droite NL, parallèle à la droite QU, le rapport de LK à KN est donc égal au rapport de JP à PG, c'est-à-dire au rapport de MF à PG. Donc par l'égalité, le rapport de LK à NQ est égal au rapport de MF à GO. Mais le rapport de NQ à LU est égal au rapport de QK à KU qui est le rapport de GO à FP. Le rapport de KL à LU est donc égal au rapport de MF à FP, donc le rapport de UK à KL est égal au rapport de PM à MF. Or le rapport de LK à KN est égal au rapport de MF à PG, donc le rapport de UK à KN est égal au rapport de MP à PG. Le rapport de NK à KU est donc égal au rapport de GP à PM. La droite NK tient donc lieu de droite NS et le cercle sera tangent à la droite UK au point K comme il a été montré dans l'analyse quand on a partagé l'étude[25] de l'angle UKQ en trois parties: ⟨angle⟩ aigu, droit ou obtus.

Si la droite QC tombe à l'extérieur du triangle UKQ et si on pose le rapport de US à SK composé, qui a été détaillé dans la proposition précédente, la démonstration s'achève comme précédemment.

B. 86ʳ Ce que / nous avons exposé pour le triangle UKQ est l'ensemble des parties de son études[26] et l'ensemble des cas de ce triangle qui peuvent avoir lieu.

C'est de cette manière que se font l'analyse de ce problème et sa synthèse.

25. Littéralement: quand on a divisé l'angle.

26. Littéralement: de ses parties.

وهذه المسألة تقع على أوضاع كثيرة. وذلك أن الدائرة المماسة للدوائر الثلاث قد يمكن أن تماس الدوائر الثلاث بمقعرها، ويمكن أن تماس دائرتين منها بمقعرها وتماس واحدة بمحدبها، ويمكن أن تماس واحدة منها بمقعرها واثنتين بمحدبها، فتختلف كيفية التحليل والتركيب فيها، ومع ذلك فإن كل واحد من هذه الأوضاع يمكن أن يحلل بعدة وجوه، وقوس ز ي ف التي زدناها في تركيب المسألة والمثلث الذي أخرجناه فيها والنسب التي استعملناها في أوتارها ليست من المقدمات التي وجدناها بالتحليل، وإنما زدناها لاستخراج المسألة بوقوع خط ن س في مثلث ص ك ق الذي إليه انتهى التحليل. ولم نحلل هذا المعنى عند انتهائنا إليه، لأنا لو حللناه هناك لطال التحليل وصعب فكان مُشتبهاً على كثير ممن ينظر فيه. فوقفنا في التحليل عند هذا الخط ثم استحرجناه من بعد بالتركيب / فقط طلباً للسهولة. س - ٣٣٦ - و

وجميع الأوضاع التي ذكرناها هي على أن الدوائر الثلاث متفرقة، وقد تكون متقاطعة ومتماسة، ويمكن أن تماسها دائرة واحدة على أوضاع مختلفة، ويمكن أن نحلل كل واحدة منها بعدة وجوه، ولكن ليس غرضنا استخراج المسألة ولا التصرف في استخراجها، وإنما غرضنا الإشارة إلى كيفية التحليل وتبيين الطريق الذي به يتصيد المقدمات التي بها نستخرج المسائل. وفيما ذكرناه من التحليل في هذه المسألة وفيما قبلها كفاية في الغرض الذي قصدنا له.

وهذا حين نختم هذه المقالة،

والله تعالى نستودع شكر ما أولانا من نعمه.

2 تماس (الثالثة) : ناقصة [س] – 6 استعملناها : استعملت [ب] / وجدناها : وجدت [ب] – 7 ن س : ع س [ب] س ع [س] – 8 انتهائنا : انتها [س] – 9 مشتبهًا : شبيه [س] / فوقفنا : فوقعنا [س] – 10 بالتركيب : التركيب [س] / للسهولة : السهولة [ب] – 12 واحدة : وضع [س] – 15 نستخرج : يستخرج [س] – 18 تعالى : ناقصة [س] / نستودع : مستودع [س] / شكرما : شكرنا [ب] / نعمه : وبعدها نجد «تم والحمد لله رب العالمين والصلاة على رسوله محمد وآله أجمعين» [س] «وهو حسبنا ونعم الوكيل [ب]؛ في صفحة ٦٨–و، كتب ناسخ [ب] العبارة التالية : «فرغ من نسخه العبد الضعيف الراجي غفران ربه الحسن بن الحسن بن محمد بن علي بن أحمد بن نظام الملك بمدينة السلم بالمدرسة النظامية ضحوة نهار السبت ثالث ‹و›عشرين جمادى الأولى سنة ٦١٢».